NGUYỄN BẢO VƯƠNG.

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489

GIỚI HẠN HÀM SỐ

TẬP 1

220 BÀI TẬP TRẮC GIỚI HẠN HÀM SỐ CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT

https://web.facebook.com/phong.baovuong 

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

TẬP I. GIỚI HẠN DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN HÀM SỐ

GIỚI HẠN DÃY SỐ

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1.1. Định nghĩa:

• Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn bằng 0 khi n tiến ra dương vô cực nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số , kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá tri tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$ .Hay là: $\lim\limits_{x\to 0} u_n = 0$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho: $|u_n| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(u_n - a\right) = 0$, tức là: Với mọi $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $|u_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > n_0$.

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

1.2. Một số giới hạn đặc biệt

• $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với $k \in \mathbb{N}^*$

• Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

• Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$

Chú ý: Ta viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

2. Một số định lí về giới hạn

Định lí 1. Nếu dãy số (u_n) thỏa $|u_n| < v_n$ kể từ số hạng nào đó trở đi và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2. Cho $\lim u_n = a,\ \lim v_n = b$. Ta có:

• $\lim(u_n + v_n) = a + b$

• $\lim(u_n - v_n) = a - b$

• $\lim(u_n . v_n) = a.b$

•

$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0)$

• Nếu $u_n \geq 0\ \forall n$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

3. Tổng của CSN lùi vô hạn

Cho CSN (u_n) có công bội q thỏa $|q| < 1$. Khi đó tổng

$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ gọi là tổng vô hạn của CSN và

$$S = \lim S_n = \lim \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}.$$

4. Giới hạn vô cực

4.1. Định nghĩa:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow$ với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-u_n\right) = +\infty$.

4.2. Một số kết quả đặc biệt

- $\lim n^k = +\infty$ với mọi $k > 0$
- $\lim q^n = +\infty$ với mọi $q > 1$.

4.3.Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cựC.

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau;

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = l$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau;

$\lim u_n$	Dấu của l	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = l$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được coi như sau;

Dấu của l	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Phương pháp:

- Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mọi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_a sao cho $|u_n| < a \;\; \forall n > n_a$.
- Để chứng minh $\lim u_n = l$ ta chứng minh $\lim(u_n - l) = 0$.

• Để chứng minh $\lim u_n = +\infty$ ta chứng minh với mọi số $M > 0$ lớn tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_M sao cho $u_n > M \quad \forall n > n_M$.

• Để chứng minh $\lim u_n = -\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n) = +\infty$.

• Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

1. $\lim \frac{n+2}{n+1} = 1$ **2.** $\lim \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$ **3.** $\lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$

Lời giải.

1. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$, ta có:

$$\left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a \text{ với } \forall n > n_a$$

Suy ra $\lim\left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{n+2}{n+1} = 1$.

2. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{3}{a} - 1}$, ta có:

$$\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{n^2+1} < \frac{3}{n_a^2+1} < a \text{ với } \forall n > n_a$$

Suy ra $\lim\left|\frac{n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

3. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\frac{9}{a^2} - 1}$, ta có:

$$\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = \left|\frac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right| < \left|\frac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{3}{\sqrt{n_a^2+1}} < a \text{ với } \forall n > n_a.$$

Suy ra $\lim\left|\frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} + 2\right| = 0 \Rightarrow \lim \frac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}} = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số $(u_n): u_n = (-1)^n$ không có giới hạn.

Lời giải.

Ta có: $u_{2n} = 1 \Rightarrow \lim u_{2n} = 1$; $u_{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim u_{2n+1} = -1$

Vì giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất nên ta suy ra dãy (u_n) không có giới hạn.

Ví dụ 3. Chứng minh các giới hạn sau:

1. $\lim \frac{n^2+1}{n} = +\infty$ **2.** $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$

Lời giải.

1. Với mọi số thực dương M lớn tùy ý, ta có:

$\left|\frac{n^2+1}{n}\right| > M \Leftrightarrow n^2 - Mn + 1 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$

Ta chọn $n_0 = \left[\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right]$ thì ta có: $\frac{n^2+1}{n} > M, \ \forall n > n_0$

Do đó: $\lim\frac{n^2+1}{n} = +\infty$.

2. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta có:

$\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M \Leftrightarrow n - M\sqrt{n} - 2 > 0 \Leftrightarrow n > \left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2$

Ta chọn $n_0 = \left[\left(\frac{M+\sqrt{M^2+8}}{2}\right)^2\right]$ thì ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{n}} > M, \ \forall n > n_0$

Do đó: $\lim\frac{2-n}{\sqrt{n}} = -\infty$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Giá trị của $\lim\frac{1}{n+1}$ bằng:

A. 0 **B.**1 **C.**2 **D.** 3

Lời giải. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$ ta có $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a \ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim\frac{1}{n+1} = 0$.

Bài 2. Giá trị của $\lim\frac{1}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ bằng:

A. 0 **B.**2 **C.**4 **D.** 5

Lời giải. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt[k]{\frac{1}{a}}$ ta có $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_a^k} < a \ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim\frac{1}{n^k} = 0$.

Bài 3. Giá trị của $\lim\frac{\sin^2 n}{n+2}$ bằng:

A. 0 **B.**3 **C.**5 **D.** 8

Lời giải. Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 2$ ta có $\frac{\sin^2 n}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n_a+2} < a \ \ \forall n > n_a$ nên có $\lim\frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$.

Bài 4. Giá trị của $\lim(2n+1)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn $n_M > \frac{M-1}{2}$

Ta có: $2n+1 > 2n_M + 1 > M \ \ \forall n > n_M \Rightarrow \lim(2n+1) = +\infty$.

Bài 5. Giá trị của $\lim \frac{1-n^2}{n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn n_M thỏa $\frac{n_M^2-1}{n_M} > M$

$\Leftrightarrow n_M > \frac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}$.

Ta có: $\frac{n^2-1}{n} > M \;\; \forall n > n_M \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{n} = +\infty$

Vậy $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$.

Bài 6. Giá trị của $\lim \frac{2}{n+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{2}{a} - 1\right] + 1$

Suy ra $\frac{2}{n+1} < a \;\; \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{2}{n+1} = 0$.

Bài 7. Giá trị của $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Ta có $\frac{|\cos n + \sin n|}{n^2} < \frac{2}{n^2}$ mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$

Bài 8. Giá trị của $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{1}{a^2} - 1\right] + 1$

Ta có: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < a \;\; \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$.

Bài 9. Giá trị của $\lim \frac{3n^3+n}{n^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M = \left[\frac{M}{3}\right] + 1$

Ta có: $\frac{3n^3+n}{n^2}=3n+\frac{1}{n}>M\ \ \forall n>n_M$

Vậy $\lim\frac{3n^3+n}{n^2}=+\infty$.

Bài 10. Giá trị của $\lim\frac{2-n}{\sqrt{n+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Với mọi $M>0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M>\left(\frac{1}{a}+3\right)^2-1$

Ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{1+n}}=\sqrt{n+1}-\frac{3}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{1+n}-3>M\ \forall n>n_M$

Suy ra $\lim\frac{2-n}{\sqrt{n+1}}=-\infty$.

Bài 11. Giá trị của $A=\lim\frac{2n+1}{n-2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Lời giải. Với số thực $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\frac{5}{a}+2>2$

Ta có: $\left|\frac{2n+1}{n-2}-2\right|=\frac{5}{|n-2|}<\frac{5}{n_a-2}<a\ \ \forall n>n_a$

Vậy $A=2$.

Bài 12. Giá trị của $B=\lim\frac{2n+3}{n^2+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải Với số thực $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn n_a thỏa $\frac{2n_a+3}{n_a^2+1}<a$

$\Leftrightarrow n_a>\frac{1+\sqrt{a^2-4a+13}}{a}$

Ta có: $\frac{2n+3}{n^2+1}<a\ \ \forall n>n_a\Rightarrow B=0$.

Bài 13. Giá trị của $C=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Với số thực $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a>\frac{1}{a}-1$

Ta có: $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}-1\right|<\left|\frac{n+2}{n+1}-1\right|<\frac{1}{n_a+1}<a\ \ \forall n>n_a$

Vậy $C=1$.

Bài 14. Giá trị của $A=\lim\frac{n-2\sqrt{n}}{2n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Đáp án $A=\frac{1}{2}$

Bài 15. Giá trị của $B=\lim\frac{n\sin n-3n^2}{n^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** 1

Lời giải $B=-3$

Bài 16. Giá trị của $C=\lim\frac{1}{n^2+2\sqrt{n}+7}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải $C=0$

Bài 17. Giá trị của $D=\lim\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 4

Lời giải $D=4$

Bài 18. Giá trị của $\lim\frac{a^n}{n!}=0$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Gọi m là số tự nhiên thỏa: $m+1>|a|$. Khi đó với mọi $n>m+1$

Ta có: $0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left|\frac{a}{1}.\frac{a}{2}...\frac{a}{m}\right|.\left|\frac{a}{m+1}...\frac{a}{n}\right|<\frac{|a|^m}{m!}.\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$

Mà $\lim\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}=0$. Từ đó suy ra: $\lim\frac{a^n}{n!}=0$.

Bài 19. Giá trị của $\lim\sqrt[n]{a}$ với $a>0$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Nếu $a=1$ thì ta có đpcm

- Giả sử $a>1$. Khi đó: $a=\left[1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]^n>n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$

Suy ra: $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}\to 0$ nên $\lim\sqrt[n]{a}=1$

- Với $0<a<1$ thì $\frac{1}{a}>1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1\Rightarrow\lim\sqrt[n]{a}=1$.

Tóm lại ta luôn có: $\lim\sqrt[n]{a}=1$ với $a>0$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của dãy số dựa vào các định lý và các giới hạn cơ bản

Phương pháp:

Sử dụng các định lí về giới hạn, biến đổi đưa về các giới hạn cơ bản.

- Khi tìm $\lim \frac{f(n)}{g(n)}$ ta thường chia cả tử và mẫu cho n^k, trong đó k là bậc lớn nhất của tử và mẫu.
- Khi tìm $\lim\left[\sqrt[k]{f(n)}-\sqrt[m]{g(n)}\right]$ trong đó $\lim f(n)=\lim g(n)=+\infty$ ta thường tách và sử dụng phương pháp nhân lượng liên hơn.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim \frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

2. $B=\lim \frac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2}+2n}$

Lời giải.

1. Ta có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Suy ra $A=\lim \frac{n^2}{2n^2+1}=\lim \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suy ra : $B=\lim \frac{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+2n}=\lim \frac{\sqrt{\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}}+2n}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau :

1. $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

2. $D=\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

Lời giải.

1. Ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

Do vậy $C=\lim \frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

2. Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ nên suy ra

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Vậy $D=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau :

1. $A=\lim\frac{4^{n+1}-5^{n+1}}{4^n+5^n}$ **2.** $B=\lim\frac{4.3^{n+2}-2.7^{n-1}}{4^n+7^{n+1}}$

Lời giải.

1. Chia cả tử và mẫu cho 5^n ta có: $A=\lim\frac{4\left(\frac{4}{5}\right)^n-5}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=-5$ (do $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$).

2. Ta có: $B=\lim\frac{36\left(\frac{4}{7}\right)^n-\frac{2}{7}}{\left(\frac{4}{7}\right)^n+7}=-\frac{2}{49}$.

Ví dụ 4. Tìm giới hạn sau : $C=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

Lời giải.

Ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ nên suy ra

$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$

Do vậy $C=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Giá trị của $A=\lim\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $A=\lim\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}$.

Bài 2. Giá trị của $B=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

Lời giải. Ta có: $B=\lim\frac{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}}{\frac{n-\sqrt{3n^2+1}}{n}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

Bài 3. Giá trị của $C=\lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4\left(n+2\right)^9}{n^{17}+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 16 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $C=\lim\frac{n^8(2+\frac{1}{n^2})^4.n^9(1+\frac{2}{n})^9}{n^{17}(1+\frac{1}{n^{17}})}=\lim\frac{(2+\frac{1}{n^2})^4.(1+\frac{2}{n})^9}{1+\frac{1}{n^{17}}}$

Suy ra $C=16$.

Bài 4. Giá trị của $D=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $D=\lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\frac{2}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{2+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}-1\right)}=\frac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$.

Bài 5. Giá trị của $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Lời giải. Ta có $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)=\lim\frac{n^2+6n-n^2}{\sqrt{n^2+6n}+n}$

$$=\lim\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=\lim\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}=3$$

Bài 6. Giá trị của $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 3

Lời giải. Ta có: $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{9n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+9n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+9n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{9}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{9}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\frac{9}{n}}+1}=3.$$

Bài 7. Giá trị của $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\frac{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{2.\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$

Bài 8. Giá trị của $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}-\lim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}-\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{1}{3}.$$

Bài 9. Giá trị của $A=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+2}+n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**2 **D.** 1

Lời giải. Ta có $A=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=+\infty$

Do $\lim n=+\infty;\lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=2$.

Bài 10. Giá trị của $B=\lim\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải Ta có: $B=\lim n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-1\right)=+\infty$

Bài 11. Giá trị của $C=\lim\frac{\sqrt[4]{3n^3+1}-n}{\sqrt{2n^4+3n+1}+n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

3. Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được

$$C=\lim\frac{\sqrt[4]{\frac{3}{n^5}+\frac{1}{n^8}}-\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}=0.$$

Bài 12. Giá trị của $D=\lim\frac{a_kn^k+...+a_1n+a_0}{b_pn^p+...+b_1n+b_0}$ (Trong đó k,p là các số nguyên dương; $a_kb_p\neq 0$).

bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Lời giải Ta xét ba trường hợp sau

- $k>p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có: $D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{p-k}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty & \text{if } a_kb_p>0\\ -\infty & \text{if } a_kb_p<0\end{cases}$.
- $k=p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có: $D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_k+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_k}$.
- $k<p$. Chia cả tử và mẫu cho n^p : $D=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+...+\frac{b_0}{n^p}}=0$.

Bài 13. Giá trị của**A.** $A=\lim\left(n^3-2n+1\right)$

bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $f(-2)=-95<0, f(-1)=1>0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{19}{32}<0$

Bài 14. Giá trị của**A.** $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right)=2=f(0)$

bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. $f(0)=1>0, f(2)=-47<0, f(10)=7921>0$

Bài 15. Giá trị của**A.** $x=0$ với •

bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Lời giải. $f(x)=0$

Bài 16. Giá trị của**A.** $y=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x\neq x_0\\ k & \text{khi } x=x_0\end{cases}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. $(-2;-1)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;2)$, $(2;10)$

Bài 17. Giá trị củ**A.** $x = x_0$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $E = \lim \dfrac{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} = \frac{3}{2}$

Bài 18. Giá trị củ**A.** $F = \lim \dfrac{(n-2)^7(2n+1)^3}{(n^2+2)^5}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**8 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $F = \lim \dfrac{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^7\left(2 + \frac{1}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^5} = 8$

Bài 19. Giá trị củ**A.** $H = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $H = \lim \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \lim \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$

Bài 20. Giá trị củ**A.** $M = \lim\left(\sqrt[3]{1-n^2-8n^3} + 2n\right)$ bằng:

A. $-\frac{1}{12}$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $M = \lim \dfrac{1-n^2}{\sqrt[3]{(1-n^2-8n^3)^2} - 2n\sqrt[3]{1-n^2-8n^3} + 4n^2} = -\frac{1}{12}$

Bài 21. Giá trị củ**A.** $N = \lim\left(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $N = \lim\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) - \lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n} - 2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) = \lim \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = 0$

$\lim\left(\sqrt[3]{8n^2+n} - 2n\right) = \lim \dfrac{n}{\sqrt[3]{(8n^2+n)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^2+n} + 4n^2} = 0$

Vậy $N=0$.

Bài 22. Giá trị của**A.** $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-3\sqrt{4n^2+n+1}+5n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{5}{12}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)-3\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\frac{1}{3}$; $\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)=\frac{1}{4}$

Do đó: $K=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{12}$

Bài 23. Giá trị của**A.** $A=\lim\frac{2n+1}{1-3n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải $A=-\frac{2}{3}$

Bài 24. Giá trị của**A.** $B=\lim\frac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.** 1

Lời giải $B=\frac{4}{9}$

Bài 25. Giá trị của**A.** $C=\lim\frac{n^3+1}{n(2n+1)^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

Lời giải $C=\frac{1}{4}$

Bài 26. Giá trị của**A.** $D=\lim\frac{n^3-3n^2+2}{n^4+4n^3+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải $D=0$

Bài 27. Giá trị của**A.** $E=\lim\frac{\sqrt{n^3+2n}+1}{n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải $E=+\infty$

Bài 28. Giá trị của**A.** $F=\lim\frac{\sqrt[4]{n^4-2n+1}+2n}{\sqrt[3]{3n^3+n}-n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{\sqrt[3]{3}-1}$ **D.** 1

Lời giải $F=\frac{3}{\sqrt[3]{3}-1}$

Bài 29. Giá trị củ**A.** $M=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** 1

Lời giải $M=\lim\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=3$

Bài 30. Giá trị củ**A.** $N=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải $N=\lim\frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}=1$

Bài 31. Giá trị củ**A.** $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-\sqrt{4n^2+3}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)-\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=-\frac{2}{3}$

Bài 32. Giá trị củ**A.** $K=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $-\infty$ **C.**2 **D.** 1

Lời giải $K=\lim\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$

Bài 33. Giá trị củ**A.** $A=\lim\frac{2n^3+\sin 2n-1}{n^3+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**2 **D.** 1

Lời giải $A=\lim\frac{2+\frac{\sin 2n-1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$

Bài 34. Giá trị củ**A.** $B=\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**0 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}<\frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}}=\frac{n}{\sqrt{n^3+2n}}\to 0\Rightarrow B=0$

Bài 35. Giá trị củ**A.** $C=\lim\sqrt{\frac{3.3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải $C=\frac{1}{2}$

Bài 36. Giá trị củ**A.** $D=\lim\frac{n+1}{n^2(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1})}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D.** 1

Lời giải $D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài 37. Giá trị củ**A.** $E=\lim(\sqrt{n^2+n+1}-2n)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải $E=-\infty$

Bài 38. Giá trị củ**A.** $F=\lim\left(\sqrt{n+1}+n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải $F=+\infty$

Bài 39. Giá trị củ**A.** $H=\lim(\sqrt[k]{n^2+1}-\sqrt[p]{n^2-1})$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Lời giải. Xét các trường hợp

TH1: $k>p\Rightarrow H=-\infty$

TH 2: $k<p\Rightarrow H=+\infty$

TH 3: $k=p\Rightarrow H=0$.

Bài 40. Giá trị của $K=\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải $K=\frac{1}{2}$

Bài 41. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Suy ra $u_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1$

Bài 42. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{9}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $1^3+2^3+...+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{3}\right]^2$

Suy ra $u_n = \dfrac{n(n+1)^2}{3(3n^3+n+2)} \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{1}{9}$.

Bài 43. Tính giới hạn của dãy số $u_n = (1-\dfrac{1}{T_1})(1-\dfrac{1}{T_2})...(1-\dfrac{1}{T_n})$ trong đó $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$**.** :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $1-\dfrac{1}{T_k} = 1-\dfrac{2}{k(k+1)} = \dfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$

Suy ra $u_n = \dfrac{1}{3}.\dfrac{n+2}{n} \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{1}{3}$.

Bài 44. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \dfrac{2^3-1}{2^3+1}.\dfrac{3^3-1}{3^3+1}....\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$**.** :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có $\dfrac{k^3-1}{k^3+1} = \dfrac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$

Suy ra $\Rightarrow u_n = \dfrac{2}{3}.\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)n} \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{2}{3}$

Bài 45. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2^k}$**.** :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $u_n - \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) - \dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}u_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 3$.

Bài 46. Tính giới hạn của dãy số $u_n = q+2q^2+...+nq^n$ **với** $|q|<1$ **.** :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{q}{(1-q)^2}$ **D.** $\dfrac{q}{(1+q)^2}$

Lời giải. Ta có: $u_n - qu_n = q+q^2+q^3+...+q^n - nq^{n+1}$

$\Rightarrow (1-q)u_n = q\dfrac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}$. Suy ra $\lim u_n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$.

Bài 47. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $n\frac{n}{n^2+n}\le u_n\le n\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow\frac{-n}{n^2+1}\le u_n-1\le\frac{-1}{n^2+1}$

$\Rightarrow|u_n-1|\le\frac{n}{n^2+1}\to0\Rightarrow\lim u_n=1$.

Bài 48. Tính giới hạn của dãy số $A=\lim\frac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+...+b_1n+b_0}$ với $a_kb_p\ne0$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**Đáp án khác **D.** 1

Lời giải. Ta chia làm các trường hợp sau

TH 1: $n=k$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được $A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_p}$.

TH 2: $k>p$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được $A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{k-p}}+\frac{b_{p-1}}{n^{k-p+1}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty & \text{khi } a_kb_p>0\\-\infty & \text{khi } a_kb_p<0\end{cases}$

TH 3: $k<p$, chia cả tử và mẫu cho n^p, ta được $A=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+\frac{a_{k-1}}{n^{p-k+1}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^p}}=0$.

Bài 49. Tính giới hạn của dãy số $B=\lim\frac{\sqrt[3]{n^6+n+1}-4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** $\frac{-3}{4}$

Lời giải. Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được:

$$B=\lim\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}}-4\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{1-4}{4}=-\frac{3}{4}.$$

Bài 50. Tính giới hạn của dãy số $C=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải. Ta có: $C=\lim\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{1}{4}$

Bài 51. Tính giới hạn của dãy số $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\frac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}=\lim\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

Vậy $D=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

Bài 52 . Cho các số thực a,b thỏa $|a|<1;|b|<1$. Tìm giới hạn $I=\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1-b}{1-a}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có $1,a,a^2,...,a^n$ là một cấp số nhân công bội a $1+a+a^2+...+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Tương tự $1+b+b^2+...+b^n=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Suy ra $\lim I=\lim\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}$

(Vì $|a|<1,|b<1|\Rightarrow\lim a^{n+1}=\lim b^{n+1}=0$).

Bài 53. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=x_n^2+x_n,\forall n\geq 1$

Đặt $S_n=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**2 **D.** 1

Lời giải. Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1}>x_n,\ \forall n=1,2,...$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n=x$

Với x là nghiệm của phương trình : $x=x^2+x\Leftrightarrow x=0<x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n=+\infty$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{x_n(x_n+1)}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_n+1}$

Suy ra: $\dfrac{1}{x_n+1}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}$

Dẫn tới: $S_n=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_{n+1}}=2-\dfrac{1}{x_{n+1}}\Rightarrow \lim S_n=2-\lim\dfrac{1}{x_{n+1}}=2$

Bài 54. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+...+\dfrac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n=\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $1-\dfrac{1}{2012!}$ **D.** $1+\dfrac{1}{2012!}$

Lời giải. Ta có: $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

Suy ra $x_k-x_{k+1}=\dfrac{1}{(k+2)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}<0\Rightarrow x_k<x_{k+1}$

Mà: $x_{2011}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}<\sqrt[n]{2011}x_{2011}$

Mặt khác: $\lim x_{2011}=\lim\sqrt[n]{2011}x_{2011}=x_{2011}=1-\dfrac{1}{2012!}$

Vậy $\lim u_n=1-\dfrac{1}{2012!}$.

Bài 55. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=2011\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n^2}\end{cases}$. Tìm $\lim\dfrac{u_n^3}{n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**3 **D.** 1

Lời giải. Ta thấy $u_n>0,\ \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3=u_n^3+3+\dfrac{3}{u_n^3}+\dfrac{1}{u_n^6}$ (1)

Suy ra: $u_n^3>u_{n-1}^3+3\Rightarrow u_n^3>u_0^3+3n$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3<u_n^3+3+\dfrac{1}{u_0^3+3n}+\dfrac{1}{\left(u_0^3+3n\right)^2}<u_n^3+3+\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{9n^2}$

Do đó: $u_n^3<u_0^3+3n+\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ (3)

Lại có: $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}=2-\dfrac{1}{n}<2\,.\,\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\le\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}}<\sqrt{2n}$

Nên: $u_0^3+3n<u_n^3<u_0^3+3n+\dfrac{2}{9}+\dfrac{\sqrt{2n}}{3}$

Hay $3+\frac{u_0^3}{n}<\frac{u_n^3}{n}<3+\frac{u_0^3}{n}+\frac{2}{9n}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

Vậy $\lim\frac{u_n^3}{n}=3$.

Bài 56. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$.

Đặt $m=\frac{4}{3}$. Tìm •.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $1-\sqrt{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $u_n=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$$f(x)=f\left(\frac{x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3^2}\right)=...=f\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

Nên $S_n=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim S_n=1-\sqrt{2}$

Bài 57. Cho dãy $x>0$ xác định như sau: $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Tìm $(0;+\infty)$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2010 **D.** 1

Lời giải. Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2010}\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}.u_n}=\frac{u_n}{2010u_{n+1}}$

$\Leftrightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}}=2010.\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Ta có $\sum\frac{u_n}{u_{n+1}}=2010(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}})=2010(1-\frac{1}{u_{n+1}})$

Mặt khác ta chứng minh được: $\lim u_n=+\infty$.

Nên $\lim(\sum\frac{u_u}{u_{n+1}})=2010$.

Bài 58. Cho dãy số $x=0$ với $f(0)=3m+1$. Dãy (s_n) được cho bởi $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(2x^2+3m+1\right)=3m+1$.

Tìm $x=0\Leftrightarrow3m+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 9

Lời giải. Bằng quy nạp ta chứng minh được: $s_n=9-\frac{4n+9}{2^n}$

Mà $\lim\frac{n}{2^n}=0\Rightarrow\lim s_n=9$.

Bài 59. Cho dãy số $f(-1)=-1,f(0)=1\Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$ được xác định bởi: $f(x)=0$.

Tính giới hạn sau nếu tồn tại: $(-1;0)$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 1

Lời giải. Ta chứng minh được: $u_n \ge 3; \forall n \in \mathbb{N}^*$, do đó $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+2)^2(u_n-2)}{5} > 0$

Từ đó thấy (u_n) tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn, khi đó tồn tại giới gạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n = a$ và ta có:

$a = \frac{a(a+1)^2-8}{5} \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 - 4a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ (loại)

Do đó $\lim u_n = +\infty$

Ta lại thấy rằng: $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+1)^2-8}{5} \Rightarrow \frac{u_n-2}{u_n^2+1} = \frac{1}{u_n+2} - \frac{1}{u_{n+1}+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì vậy nên: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{u_i-2}{u_i^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{u_1+2} - \frac{1}{u_{n+1}+2}\right) = \frac{1}{5}$.

Bài 60. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{n.\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $1+3+5+...+2n-1 = n^2$ nên $\lim u_n = \frac{1}{2}$

Bài 61. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x \ne 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

Lời giải. Ta có: $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Nên $\lim u_n = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

Bài 62. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x \le 0 \end{cases}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ Suy ra $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 1$

Bài 63. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \ge 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ trong đó $x \ne 1$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $1-\frac{1}{T_k}=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$ Suy ra $u_n=\frac{1}{3}.\frac{n+2}{n}\Rightarrow \lim u_n=\frac{1}{3}$.

Bài 64. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có • Suy ra $f(0)>0$

Bài 65. Tìm $\lim u_n$ biết $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $g(x)=f(x)-x$ g.

Bài 66. Tìm $\lim u_n$ biết $\mathbb{R}$ với $x=1$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{q}{(1-q)^2}$ **D.** $1-\frac{q}{(1-q)^2}$

Lời giải. Ta có: $[0;+\infty)\Rightarrow(1-q)u_n=q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}$. Suy ra $\lim u_n=\frac{q}{(1-q)^2}$.

Bài 67. Tìm $\lim u_n$ biết $f(1)=3m-2$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $n\frac{n}{n^2+n}\le u_n\le n\frac{n}{n^2+1}\Rightarrow\frac{-n}{n^2+1}\le u_n-1\le\frac{-1}{n^2+1}\Rightarrow|u_n-1|\le\frac{n}{n^2+1}\to 0\Rightarrow \lim u_n=1$.

Bài 68. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $k=1,2,...,n$ Suy ra $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<u_n<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ nên suy ra $\lim u_n=1$.

Bài 69. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{n\text{ dau can}}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Lời giải. Ta có: $u_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$,nên $\lim u_n=\lim 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$.

Bài 70. Gọi $g(x)\ne 0,\ \forall x\le 2$ là dãy số xác định bởi •. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có $0<u_1<u_2 \Rightarrow u_3=-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_1}<-\frac{4}{9}+\frac{8}{9}\sqrt{3u_2}=u_3$ nên dãy (u_n) là dãy tăng.

Dễ dàng chứng minh được $u_n<\frac{4}{3},\forall n\in\mathbb{N}^*$ .Từ đó tính được $\lim u_n=\frac{4}{3}$.

Bài 71. Cho dãy số $A=\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$ được xác định như sau $\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Đặt $x\le\frac{3}{2}$. Tìm $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $u_{n+1}=\sqrt{(u_n^2+3u_n)(u_n^2+3u_n+2)+1}=\sqrt{(u_n^2+3u_n+1)^2}$

$=u_n^2+3u_n+1$

Suy ra: $u_{n+1}+1=(u_n+1)(u_n+2)\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_n+2}$

Suy ra: $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_n+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1}$

Do đó, suy ra: $v_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{u_i+1}-\frac{1}{u_{i+1}+1}\right)=\frac{1}{u_1+1}-\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{u_{n+1}+1}$

Mặt khác, từ $u_{n+1}=u_n^2+3u_n+1$ ta suy ra: $u_{n+1}>3^n$.

Nên $\lim\frac{1}{u_{n+1}+1}=0$. Vậy $\lim v_n=\frac{1}{2}$.

Bài 72. Cho $a,b\in\mathbb{N}^*,(a,b)=1;n\in\{ab+1,ab+2,...\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u,v)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ sao cho $n=au+bv$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=\frac{1}{ab}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{ab}$ **D.** $ab-1$

Lời giải. Xét phương trình $\left[0;\frac{n-1}{n}\right]$ (1).

Gọi (u_0,v_0) là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử (u,v) là một nghiệm nguyên dương khác (u_0,v_0) của (1).

Ta có $au_0+bv_0=n,au+bv=n$ suy ra $a(u-u_0)+b(v-v_0)=0$ do đó tồn tại k nguyên dương sao cho $u=u_0+kb,v=v_0-ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0-ka\ge1\Leftrightarrow k\le\frac{v_0-1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số k nguyên dương cộng với 1. Do đó $r_n=\left[\frac{v_0-1}{a}\right]+1=\left[\frac{n}{ab}-\frac{u_0}{b}-\frac{1}{a}\right]+1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\frac{n}{ab}-\frac{u_0}{b}-\frac{1}{a}\le r_n\le\frac{n}{ab}-\frac{u_0}{b}-\frac{1}{a}+1.$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{ab}-\frac{u_0}{nb}-\frac{1}{na}\le\frac{r_n}{n}\le\frac{1}{ab}-\frac{u_0}{nb}-\frac{1}{na}+\frac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=\frac{1}{ab}$.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

1.1. Giới hạn hàm số: Cho khoảng K chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\backslash\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có: $f(x_n)\to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0.$$

1.2.Giới hạn một bên:

* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(x_0;b)$ .Số L gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n):x_0<x_n<b$ mà $x_n\to x_0$ thì ta có: $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;x_0)$ .Số L gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy $(x_n):a<x_n<x_0$ mà $x_n\to x_0$ thì ta có: $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

Chú ý: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

1.3. Giới hạn tại vô cực

* Ta nói hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$ có giới hạn là L khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n):x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$.

* Ta nói hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-\infty;b)$ có giới hạn là L khi $x\to-\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n):x_n<b$ và $x_n\to-\infty$ thì $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$.

1.4.Giới hạn vô cực

* Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số $(x_n):x_n\to x_0$ thì $f(x_n)\to+\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.

* Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực

* Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay x_0 bởi $-\infty$ hoặc $+\infty$.

2. Các định lí về giới hạn

***Định lí 1**:* Gới hạn của tổng, hiệu, tích, thương (mẫu số dẫn về $L\neq 0$) khi $x\to x_0$ (hay $x\to+\infty;x\to-\infty$) bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn đó khi $x\to x_0$ (hay $x\to+\infty;x\to-\infty$) .

Chú ý: Định lí trên ta chỉ áp dụng cho những hàm số có giới hạn là hữu hạn. Ta không áp dụng cho các giới hạn dần về vô cực

Định lí 2: (Nguyên lí kẹp)

Cho ba hàm số $f(x),g(x),h(x)$ xác định trên K chứa điểm x_0 (có thể các hàm đó không xác định tại x_0). Nếu $g(x)\le f(x)\le h(x)$ $\forall x\in K$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.

3. Một số gới hạn đặc biệt

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} x^{2k+1} = +\infty\ (-\infty)$

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{k}{f(x)} = 0\ \ (k\neq 0)$.

Vấn đề 1. Tìm giới hạn bằng định nghĩa

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giới hạn các hàm số sau bằng định nghĩa :

1. $A = \lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x+1)$ **2.** $B = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ **3.** $C = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ **4.** $D = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$

Lời giải.

1. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ ta có:

$A = \lim\left(3x_n^2+x_n+1\right) = 3+1+1 = 5$

2. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 1$ và $x_n \neq 1\ \ \forall n$ ta có:

$$B = \lim\frac{(x_n-1)(x_n^2+x_n+1)}{x_n-1} = \lim\left(x_n^2+x_n+1\right) = 3 .$$

3. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = 2$ và $x_n \neq 2\ \ \forall n$ ta có:

$$B = \lim\frac{\sqrt{x_n+2}-2}{x_n-2} = \lim\frac{(x_n-2)}{(x_n-2)\left(\sqrt{x_n+2}+2\right)} = \lim\frac{1}{\sqrt{x_n+2}+2} = \frac{1}{4}$$

4. Với mọi dãy (x_n) mà $\lim x_n = +\infty$ ta có:

$$D = \lim\frac{3x_n+2}{x_n-1} = \lim\frac{3+\frac{2}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}} = 3 .$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số sau không có giới hạn:

1. $f(x) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x\to 0$ **2.** $f(x) = \cos^5 2x$ khi $x\to-\infty$.

Lời giải.

1. Xét hai dãy $(x_n): x_n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+n2\pi\right)^2}, (y_n): y_n = \dfrac{1}{(n\pi)^2}$

Ta có: $\lim x_n = \lim y_n = 0$ và $\lim f(x_n) = 1;\ \lim f(y_n) = 0$.

Nên hàm số không có giới hạn khi $x\to 0$.

2. Tương tự ý 1 xét hai dãy: $x_n = n\pi;\ y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ thì $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Lời giải.

Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = x_0$ ta có: $\lim|f(x_n)| = 0 \Rightarrow \lim f(x_n) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải. Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = 1$ ta có: $\lim\frac{x_n+1}{x_n-2} = -2$ Vậy $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2} = -2$.

Bài 2 Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right)$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 9 **D.** 1

Lời giải $\lim_{x\to 2}\left(x^3+1\right) = 9$

Bài 3. Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}$

Bài 4 Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+3}{x-2} = 1$

Bài 5 Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+1}{x+2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-x+1}{x+2} = -\infty$

Bài 6 Tìm giới hạn hàm số $\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 5 **D.** 1

Lời giải. Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = 2$ ta có: $\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{2x-1} = \lim\frac{3x_n+2}{2x_n-1} = \frac{3.1+2}{2.1-1} = 5$

Bài 7 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=0$ ta có:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}=\lim\frac{\sqrt{x_n+4}-2}{2x_n}=\lim\frac{x_n}{2x_n\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\lim\frac{1}{2\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

Bài 8 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4x-3}{x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải. Với mọi dãy $(x_n):x_n>1,\ \forall n$ và $\lim x_n=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4x-3}{x-1}=\lim\frac{4x_n-3}{x_n-1}=+\infty$.

Bài 9 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải. Với mọi dãy $(x_n):x_n<2,\ \forall n$ và $\lim x_n=2$ ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3x-1}{x-2}=\lim\frac{3x_n-1}{x_n-2}=-\infty$.

Bài 10 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** 5 **C.** -2 **D.** 1

Lời giải. Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim\frac{2x_n^2+x_n-3}{x_n-1}=\lim\left(2x_n+3\right)=5$.

Bài 11 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{(2-x)^4}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải. Đáp số: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{(2-x)^4}=+\infty$

Bài 12 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{2x^2+1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Lời giải Đáp số: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$

Bài 13 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+x-1\right)$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Lời giải Đáp số: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$

Bài 14 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^4+1)(2-x)}}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải. Đáp số: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^4+1)(2-x)}}=0$

Bài 15 Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -1

Lời giải. Do $x\to -1^- \Rightarrow |x+1|=-(x+1)$. Đáp số: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}=-1$.

Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

Bài toán 01: Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ biết $f(x)$ xác định tại x_0.

Phương pháp:

* Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

* Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}$

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3\cos x+x}{2x+\cos^2 3x}=\dfrac{\sin 0+3\cos 0+0}{2.0+\cos^2 0}=3$

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{\sqrt[3]{x+6}+2x-1}=\dfrac{\sqrt{2^2+3}-2.2}{\sqrt[3]{2+6}+2.2-1}=\dfrac{\sqrt{7}-4}{5}$.

Ví dụ 2. Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hay tìm giới hạn đó?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{khi } x<1\\ \dfrac{3x+2}{3} & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ khi $x\to 1$;

2. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2+3x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$ khi $x\to 0$

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{3x+2}{3} = \frac{5}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{5}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{5}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2+3x+1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+3x+2) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Ví dụ 3. Tìm m để các hàm số:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx+2m+1}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \dfrac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 0$.

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3mx+2m-1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 1$.

Lời giải.

1. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+mx+2m+1}{x+1} = 2m+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x+3m-1}{\sqrt{1-x}+2} = \frac{3m-1}{3}$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 2m+1 = \frac{3m-1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$.

2. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(3mx+2m-1) = 5m-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2+x-2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-(x+2)\sqrt{1-x} + mx + 1\right) = m+1$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow 5m-1 = m+1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn hàm số $A = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x+1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Bài 2 Tìm giới hạn hàm số $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\tan x+1}{\sin x+1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\tan x+1}{\sin x+1}=\frac{2\tan\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}+1}=\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

Bài 3 Tìm giới hạn hàm số $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\sqrt[3]{2}+1$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}=\sqrt[3]{2}+1$.

Bài 4 Tìm giới hạn hàm số $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -3

Lời giải Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}=\frac{\sqrt[3]{8}+1}{1-2}=-3$.

Bài 5 Tìm giới hạn hàm số $A=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+x+4}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Lời giải $A=\frac{-1}{6}$

Bài 6 Tìm giới hạn hàm số $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{2}$ **D.** 1

Lời giải $B=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{2}$

Bài 7 Tìm giới hạn hàm số $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{9}{2}$ **D.** $\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

Lời giải $C=\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

Bài 8 Tìm giới hạn hàm số $D=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$ bằng định nghĩ**A.**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 0

Lời giải $D=0$

Bài 9. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x\to 2$ $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax+2)=2a+6$. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2-x+1)=7$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2a+6=7 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$. Vậy $a=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài.10 Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x=0$ $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & khi \quad x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & khi \quad x<0\end{cases}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2a+1=1+\sqrt{2}=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 11 Tìm a để hàm số. $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & khi \quad x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & khi \quad x<0\end{cases}$ có giới hạn tại $x\to 0$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5ax^2+3x+2a+1\right)=2a+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x+\sqrt{x^2+x+2}\right)=1+\sqrt{2}$

Vậy $2a+1=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 12 Tìm a để hàm số. $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>1\\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 1$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax+2)=a+3$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-x+3a)=3a+1$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow a+3=3a+1 \Leftrightarrow a=1$. Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 02. Tìm $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Dạng này ta gọi là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bơzu cho đa thức:

Định lí: Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$ thì ta có :

$$f(x)=(x-x_0)f_1(x).$$

*Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức thì ta phân tích $f(x)=(x-x_0)f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)g_1(x)$. Khi đó $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, nếu giới hạn này có dạng $\frac{0}{0}$ thì ta tiếp tục quá trình như trên.

Chú ý :Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

2. $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$

3. $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

* Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu $\sqrt[n]{u(x)},\sqrt[m]{v(x)}\to c$ thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-c)-(\sqrt[m]{v(x)}-c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau: $\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}$

2. $B=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-5x^3+2x^2+6x-4}{x^3-x^2-x+1}$

Lời giải.

1. Ta có: $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$

Suy ra: $\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to1}\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)=n$.

2. Ta có: $x^5-5x^3+2x^2+6x-4=(x-1)^2(x+2)(x^2-2)$

$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1}=-\frac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ **2.** $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}$

Lời giải.

1. Ta có: $(1+mx)^n=1+mnx+\frac{m^2n(n-1)x^2}{2}+m^3x^3.A$

Với $A=C_n^3+mxC_n^4+...+(mx)^{n-3}C_n^n$

$(1+nx)^m=1+mnx+\frac{n^2m(m-1)x^2}{2}+n^3x^3B$

Với $B=C_m^3+nxC_m^4+...+(nx)^{m-3}C_m^m$

Do đó: $C=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{m^2n(n-1)-n^2m(m-1)}{2}+x\left(m^3A-n^3B\right)\right]$

$=\frac{m^2n(n-1)-n^2m(m-1)}{2}=\frac{mn(n-m)}{2}$.

2. Ta có: $\frac{(1+2x)^2(1+3x)^3-1}{x}=\frac{(1+2x^2)\left[(1+3x)^3-1\right]}{x}+$

$+\frac{(1+2x)^2-1}{x}=(1+2x)^2\left(9+27x+27x^2\right)-(4+4x)$

Suy ra: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^2\left(9+27x+27x^2\right)-(4+4x)\right]=5$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-x}{\sqrt{3x-2}-2}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1-x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)}=0$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(3x+2-x^3)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-(x^2+2x+1)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4)}=-1$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

1. $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$ **2.** $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$

Lời giải.

1. Đặt $t = x - 1$ ta có: $B = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{2t+1} - 1}{t} = \dfrac{2}{3}$

2. Ta có: $\sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}.\sqrt[4]{4x-3} - 1 = \sqrt{2x-1}.\sqrt[3]{3x-2}\left(\sqrt[4]{4x-3} - 1\right) +$

$+\sqrt{2x-1}\left(\sqrt[3]{3x-2} - 1\right) + \sqrt{2x-1} - 1$

Mà: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1} = 1$

Nên ta có: $C = 1 + 1 + 1 = 3$.

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

1. $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt{5x-1}}{x-1}$

2. $B = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

Lời giải.

1. Ta có: $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1} - 2 - (\sqrt{5x-1} - 2)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x-1} - \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x-1} - 2}{x-1} = I - J$

$I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4} = \dfrac{7}{12}$.

$J = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1} + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{\sqrt{5x-1} + 1} = \dfrac{5}{3}$

Vậy $A = -\dfrac{2}{3}$.

2. Ta có: $B = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\dfrac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} - \dfrac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7}}$

Mà: $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + 3} = \dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x+20})^2 + 3\sqrt[3]{x+20} + 9} = \dfrac{1}{27}$

$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7} = \lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{(\sqrt[4]{x+9})^3 + 2(\sqrt[4]{x+9})^2 + 4\sqrt[4]{x+9} + 8} = \dfrac{1}{32}$.

Vậy $B = \dfrac{\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{32}} = \dfrac{112}{27}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}=\frac{3}{2}$.

Bài 2 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3-2^3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$.

Bài 3 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 25

Lời giải. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+3x)^3-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-4x)^4-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x[(1+3x)^2+(1+3x)+1]}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4x(2-4x)[(1-4x)^2+1]}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}3[(1+3x)^2+(1+3x)+1]+\lim\limits_{x\to 0}4(2-4x)[(1-4x)^2+1]=25$

Bài 4 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 6

Lời giải.Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6$.

Bài 5 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{n}{m}$ **D.** $m-n$

Lời giải Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1}=\frac{n}{m}$.

Bài 6 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N}^*,a\neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{n}$ **D.** $1-\frac{n}{a}$

Lời giải. Cách 1: Nhân liên hợp

Ta có:

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+ax}-1)(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1}=\frac{a}{n}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow x=\frac{t^n-1}{a}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

$$\Rightarrow B=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^n+...+t+1)}=\frac{a}{n}.$$

Bài 7 Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{am}{bn}$ **D.** $1+\frac{am}{bn}$

Lời giải. Áp dụng bài toán trên ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[m]{1+bx}-1}=\frac{a}{n}.\frac{m}{b}=\frac{am}{bn}.$$

Bài 8 Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $B=\frac{\gamma}{4}-\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}$ **D.** $B=\frac{\gamma}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha}{2}$

Lời giải. Ta có: $\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1=$

$$=\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}(\sqrt[4]{1+\gamma x}-1)+\sqrt{1+\alpha x}((\sqrt[3]{1+\beta x}-1)+(\sqrt{1+\alpha x}-1)$$

$$B=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x})\frac{\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\alpha x}\frac{\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}-1}{x}$$

Bài 9. Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+1)}=\frac{1}{3}$

Bài 10 Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $B=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{1}{5}$

Bài 11 Tìm giới hạn $C=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $C=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}=\frac{-1}{3}$

Bài 12. Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $D=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+\sqrt[4]{(2x+1)^2}+\sqrt[4]{2x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\frac{2}{3}$

Bài 13. Tìm giới hạn $E=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{-8}{27}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $E=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}-\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=A-B$

$$A=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{2\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right)}=\frac{64}{27}$$

$$B=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\frac{8}{3}$$

$$E=A-B=\frac{64}{27}-\frac{8}{3}=\frac{-8}{27}$$

Bài 14. Tìm giới hạn $F=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $F=\frac{9}{2}$

Bài 15. Tìm giới hạn $M=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $M=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-(2x+1)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6x}-(2x+1)}{x^2}=0$

Bài 16 Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$ **D.** $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$

Lời giải. Ta có: $N=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$

Bài 17 Tìm giới hạn $G=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$ **D.** $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$

Lời giải. Ta có: $G=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}\left(\sqrt[n]{1+bx}-1\right)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}=\frac{b}{n}+\frac{a}{m}$

Bài 18 Tìm giới hạn $V=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{mn(n-m)}{2}$ **D.** $\frac{mn(n+m)}{2}$

Lời giải. Ta có: $V=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+nx)^m-(1+mnx)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+mnx)}{x^2}=\frac{mn(n-m)}{2}$.

Bài 19 Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{n!}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\frac{1}{n!}$.

Bài 20 Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $2n$ **D.** 0

Lời giải. $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-1\right]\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n+1\right]}{x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n}=2n$.

Bài 21 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{1}{4}$

Bài 22 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{2}{5}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=-\dfrac{2}{5}$

Bài 23 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

Bài 24 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{2x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}$

Bài 25 Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{8}{27}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $E=\left(\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7}-\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\right)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{x-7}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4(x-7)}{(x-7)\left[\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right]}=\dfrac{4}{27}$

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\dfrac{1}{6}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=16$

Do đó: $E=16\left(\dfrac{4}{27}-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{8}{27}$.

Bài 26 Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{9}{n}$ **D.** 0

Lời giải. Đặt $y=\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}\Rightarrow y\to 1$ khi $x\to 0$

Và: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)-1}{x}=9$

Do đó: $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^n-1}{x\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)}=\dfrac{9}{n}$

Bài 27. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{9}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}.\dfrac{x^2}{1-\cos 3x}=2.\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$.

Bài 28. Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2\left(an-bm\right)}{mn}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $N=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}\right).\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

$=\left(\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}\right).2=\dfrac{2(an-bm)}{mn}$.

Bài 29 Tìm giới hạn $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+mx\right)^n-\left(1+nx\right)^m}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2\left(an-bm\right)}{mn}$ **D.** $mn\left(n-m\right)$

Lời giải Ta có: $V=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\left(1+mx\right)^n-1}{x^2}-\dfrac{(1+nx)^m-1}{x^2}\right]\dfrac{x^2}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$

$=\dfrac{mn(n-m)}{2}.2=mn(n-m)$.

Bài 30 Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)...\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x^2\right)^{n-1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{n!}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\dfrac{1}{n!}$.

Bài 31 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1\right]}=\frac{2}{3}$

Vậy $A=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

Bài 32 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Lời giải Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4(x-1)\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5(x-1)\left[\sqrt{4x+5}+3\right]}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\frac{2}{5}$.

Bài 33. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 3

Lời giải Ta có: $C=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[4]{2x+3}-1}{\sqrt{x+2}-1}-\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$

$$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{\sqrt[4]{2(x+1)+1}-1}{x+1}}{\frac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}-\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{\sqrt[3]{-3(x+1)+1}-1}{x+1}}{\frac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}-\frac{-1}{\frac{1}{2}}=3$$

Bài 34 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x^3-3x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x+1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=1$.

Bài 35 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Cách 1: Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow x=\frac{t^3-1}{3}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

Nên $A=\lim\limits_{t\to 1}\frac{\sqrt{1+\frac{t^3-1}{3}}-t}{\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^2}=9\lim\limits_{t\to 1}\frac{\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}-t}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t^3-3t^2+2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2(t+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to 1}\frac{t+2}{(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}-\lim_{x\to 0}\frac{-3-x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+(1+x)^2}$$

Do đó: $A=\frac{1}{2}$.

Bài 36. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** -1

Lời giải. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2(x-1)}$

Đặt $t=x+1$. Khi đó:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+4t}-\sqrt[3]{1+6t}}{t^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4t}-(2t+1)}{t^2}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+6t}-(2t+1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4t}+2t+1}-\lim_{t\to 0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)^2}=2.$$

Do đó: $B=-1$.

Bài toán 03: Tìm $B=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $f(x),g(x)\to\infty$, dạng này ta còn gọi là dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Phương pháp: Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

* $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}+3x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=8$

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+3}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{2x+2}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x(2+\dfrac{2}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}=\sqrt{3}$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{6}$

Bài 2 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 1

Lời giải Ta có: $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^2}+1}}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+1}}=1$

Bài 3 Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$

Bài 4 Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải 4. Ta có: $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1\right)=-\infty$

Bài 5 Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Lời giải. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\begin{cases}2 & \text{khi } x\to+\infty\\ -2 & \text{khi } x\to-\infty\end{cases}$

Bài 6 Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $N=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x}+4x^2}=0$

Bài 7 Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $H=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^4+3x+1}-(4x^2+2)}{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{16x^4+3x+1-(4x^2+2)^2}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-16x^2+3x-3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$$

Suy ra $H=0$.

Bài 8 Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $K=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x^3+7x^2-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Bài 9 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2(3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}$

Bài 10 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$ $(a_0b_0\neq0)$:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Lời giải. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}$

* Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

* Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

* Nếu $m<n$

$\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-m}(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}$.

Bài 11 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt[4]{4+\frac{2}{x^4}}}=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Bài 12 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x})}=\dfrac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x}}=+\infty$

(do tử $\to+\infty$, mẫu $\to\sqrt[3]{2}$).

Bài 13. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{16}$ **D.** 0

Lời giải $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}-2\right)^7}=-\dfrac{1}{16}$

Bài 14. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**2 **D.** 0

Lời giải $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-2}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x}=2$

Bài 15 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ **D.** 0

Lời giải $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{5-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

Bài 16. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** -1

Lời giải $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}}}=-1$

Bài 17. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=-\infty$

Bài 18 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

Bài 19 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1}{2}$.

Bài 20. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có:

$$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=M+N$$

$$M=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\frac{1}{3}$$

$$N=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\frac{1}{2}$$

Do đó: $B=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

Bài 21. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^2-4(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$$=\frac{2x\sqrt{x^2+x+1}+1+5x-2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}+\frac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$$

$$=\frac{2x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}+$$

$$+\frac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}.$$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}+$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+5}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{2}$

Bài 22. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$=2x\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\dfrac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$.

Nên $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+\dfrac{1}{x})}=-\dfrac{1}{4}$.

Bài 23. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$, $(a_0b_0\neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}$

- Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.
- Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

- Nếu $m < n$, ta có: $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-m}(a_0 + \frac{a_1}{x} + ... + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n})}{b_0 + \frac{b_1}{x} + ... + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}} = \begin{cases} +\infty \text{ khi } a_0.b_0 > 0 \\ -\infty \text{ khi } a_0b_0 < 0 \end{cases}$

Bài 24 Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x} + \sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 4

Lời giải Ta có: $B = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}} + x.\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}} = 4$

Bài 25. Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2} + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $C = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}} + |x|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4-\frac{2}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{3}{2}$

Bài 26. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}} + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$.

Bài toán 04: Dạng vô định: $\infty - \infty$ **và** $0.\infty$

Phương pháp:

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau: $A = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2} + \sqrt{x^2-2x})$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt[3]{x^3-3x^2} + \sqrt{x^2-2x} = (\sqrt[3]{x^3-3x^2} - x) + (\sqrt{x^2-2x} + x)$

$$= \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3-3x^2} + x^2} + \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} - x}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x})^2} + \sqrt[3]{1-\frac{3}{x}} + 1} + \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}} - 1} = 0.$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn sau: $B = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x = \dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x} - 4x^2 - 4x}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x}$

$$= 2x\frac{\sqrt{x^2+2x} - x - 1}{\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \frac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x)(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}.$$

$$\Rightarrow B = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x} + 2\sqrt{x^2+x} + x)(\sqrt{x^2+2x} + x + 1)}$$

$$B = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x})} = -\frac{1}{4}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm giới hạn $A = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1} - x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-x+1} - x)(\sqrt{x^2-x+1} + x)}{\sqrt{x^2-x+1} + x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1} + x} = -\frac{1}{2}.$$

Bài 2 Tìm giới hạn $B = \lim_{x\to-\infty}\left(2x + \sqrt{4x^2-x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. $B = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{(2x-\sqrt{4x^2-x+1})(2x+\sqrt{4x^2-x+1})}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}} = \dfrac{1}{4}.$

Bài 3 Tìm giới hạn $C = \lim_{x\to+\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)} - x]$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ **D.** $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{2n}$

Lời giải. Đặt $y=\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$

$\Rightarrow y^n-x^n=(y-x)(y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1})\Rightarrow y-x=\dfrac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^n-x^n}{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}$

$\Rightarrow C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}}{\dfrac{y^{n-1}+y^{n-1}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^n-x^n}{x^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1+a_2+...+a_n+\dfrac{b_2}{x}+\dfrac{b_3}{x^2}+...+\dfrac{b_n}{x^{n-1}})$

$=a_1+a_2+...+a_n$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^kx^{n-1-k}}{x^{n-1}}=1\ \forall k=0,...,n-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^{n-1}+y^{n-2}x+...+x^{n-1}}{x^{n-1}}=n$.

Vậy $C=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Bài 4 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Lời giải. $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$

Bài 5 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải $B=-\infty$

Bài 6 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** Đáp án khác

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=1$.

Bài 7 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{(8x^3+2x)}+4x^2}=0$

Bài 8 Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-2x\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}-2x\right)=0$

Bài 9 Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt[3]{1-x^3})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. $F=-\infty$.

Bài toán 05: Dạng vô định các hàm lượng giác

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ **2.** $B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

Lời giải.

1. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}.\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}.\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\dfrac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\cos x}+1}=\dfrac{1}{6}$

Do đó: $A=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{12}$.

2. Ta có: $B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}}{\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}}$

Mà: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+x+1}+\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{(1+3x)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}.\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2x}}=1$$

Vậy $B=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $A=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}$ **2.** $B=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sin x+\cos^3 x\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Lời giải.

1. Ta có: $0\le\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|\le x^3$

Mà $\lim_{x\to 0}x^3=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left|x^3\sin\frac{1}{x^2}\right|=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x^2}=0$

Vậy $A=0$.

2. Ta có: $B=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sin x+\cos^3 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà: $0\le\left|\frac{2\sin x+\cos^2 x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right|\le\frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to +\infty$.

Do đó: $B=0$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\frac{a}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{a}{2}$.

Bài 2 Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{m}{n}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $\frac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}+2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}$

$$=\frac{m}{n}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}$$

$$A=\frac{m}{n}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\lim_{x\to0}\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}=\frac{m}{n}.$$

Bài 3 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 0

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\frac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim_{x\to0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}=3$$

Bài 4 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}x(\frac{\sin x}{x})^2.\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=0$.

Bài 5 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. $B=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}=-\lim\limits_{x\to0}(\frac{5}{2}.\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}).\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos\frac{7x}{2}}=\frac{5}{2}$.

Bài 6 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 6 **D.** 0

Lời giải. $C=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{1-\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{2\sin^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^2.(\frac{x}{\sin x})^2(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}).$$

$\Rightarrow C=6$.

Bài 7 Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{7}{2}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $D=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}}$

Mà : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{3x}.\frac{1}{\sqrt{1+x\sin 3x}+1})+2=\frac{7}{2}.$$

Vậy: $D=\frac{7}{2}$.

Bài 8 Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 1}.\frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{n}{m}$ **D.** 0

Lời giải $A=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\sin\pi(1-x^n)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x^m)}{\pi(1-x^m)}.\lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x^n)}{\sin\pi(1-x^n)}.\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^n}{1-x^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{(1-x)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1)}=\frac{n}{m}.$$

Bài 9 Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có: $B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

Bài 10 Tìm giới hạn $C=\lim_{x\to 0}x^\alpha\sin\frac{1}{x}\quad(\alpha>0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $0\le|x^\alpha\sin\frac{1}{x}|<x^\alpha$. Mà $\lim_{x\to 0}x^\alpha=0$

Nên theo nguyên lí kẹp $\Rightarrow A_{39}=0$.

Bài 11 Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Trước hết ta có: $\sin x<x \quad \forall x>0$

Ta có: $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|$

$<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$ nên $D=0$.

Bài 12 Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos4x}{\cos5x-\cos6x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{7}{11}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $A=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{7}{11}$

Bài 13 Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt[3]{1+2\sin2x}}{\sin3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{4}{9}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có $B=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin2x}{\sin3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin2x)^2}\right)}=-\frac{4}{9}$

Bài 14 Tìm giới hạn $C=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -96 **D.** 0

Lời giải. Ta có: $C=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\frac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96$

Bài 15 Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{16}{81}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $D=\frac{16}{81}$

Bài 16 Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}=0$

Bài 17 Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $0\le\dfrac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

Bài 18 Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$

Bài 19 Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{2n}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $1-\sqrt[n]{\cos ax}=\dfrac{1-\cos ax}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}$

$\Rightarrow M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}=\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{n}=\dfrac{a}{2n}$.

Bài 20 Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{7}{11}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{7}{11}$

Bài 21 Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{4}{9}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)}=-\dfrac{4}{9}$

Bài 22 Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -96 **D.** 0

Lời giải. Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96$

Bài 23 Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{16}{81}$ **D.** 0

Lời giải Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^4.\left(\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)^4.\dfrac{16}{81}=\dfrac{16}{81}$

Bài 24 Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.**1 **D.** 0

Lời giải. Ta có: $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}$ Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$;

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\tan x}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\dfrac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.x.\frac{x}{\tan x}=0$$

Do đó: $E=0$.

Bài 25 Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $0\le\dfrac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

Bài 26 Tìm giới hạn $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{b}{2n}-\dfrac{a}{2m}$

Bài 27 Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Lời giải. Ta có: $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

GIÁO VIÊN MUỐN MUA FILE WORD LIÊN HỆ 0946798489

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

TẬP 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC

https://web.facebook.com/phong.baovuong

Mục lục

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Định nghĩa

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$

1) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0

- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó kiên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

2. Các định lý cơ bản.

Định lý 1 :

a) Hàm số đa thức liên tục trên tập R

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lý 2. Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó tổng, hiệu, tích liên tục tai x_0, thương $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $f(a) \neq f(b)$ và M là một số nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$

<u>**Hệ quả**</u>: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Chú ý : Ta có thể phát biểu hệ quả trên theo cách khác như sau :

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Vấn đề 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp:

- Tìm giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

3. Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.

4. Hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x<x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_2(x)=f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x>x_0 \\ g(x) & \text{khi } x\leq x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x=3$

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x^2-x-6} & \text{khi } x\neq 3 \\ \dfrac{10}{3} & \text{khi } x=3 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3} & \text{khi } x<3 \\ (x-1)^2 & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$

Lời giải.

1. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $f(3)=\dfrac{10}{3}$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+2}=\dfrac{27}{5}\neq f(3)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x=3$.

2. Ta có $f(3)=4$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-1)^2=4$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2}=3\neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=3$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm chỉ ra

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\neq 1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$ tại điểm $x_0=1$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-x-2|}{x+1} & \text{khi } x\neq -1 \\ 1 & \text{khi } x=-1 \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2=f(1)$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

2. Ta có $f(-1)=1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+}(2-x) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{|(x+1)(x-2)|}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-}(x-2) = -3 \ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Suy ra không tồn tại giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to -1$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = -1$.

Ví dụ 3 Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 2$

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & \text{khi } x \ne 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} & \text{khi } x < 2 \\ ax^2+x+1 & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $f(2) = a$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4}{\sqrt[3]{(4x)^2}+2\sqrt[3]{4x}+4} = \dfrac{1}{3}$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3}$.

2. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4} = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax^2+x+1\right) = 4a+3 = f(2)$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow 4a+3 = 1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x \ne 4 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x = 4$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên tập xác định nhưng gián đoạn tại $x = 4$

C. Hàm số không liên tục tại $x = 4$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4} = f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4$.

Bài 2 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x > 1 \\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x = 1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại $x=1$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=1$.

Bài 3 Cho hàm số **3.** $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.

B. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

Bài 4. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A.1 **B.**2 **C.**3 **D.**4

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=1$

Vậy ta chọn $f(0)=1$

Bài 5. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A.1 **B.**2 **C.** $\dfrac{2}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\left(\sqrt[3]{(2x+8)^2}+2.\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}=\dfrac{2}{9}$

Vậy ta chọn $f(0)=\dfrac{2}{9}$.

Bài 6 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x>-1\\ 2x+3 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại tại $x_0=-1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại tại $x_0=-1$..

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Ta có: $f(-1)=1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x+3)=1$

$$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$$

$$\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0=-1$.

Bài 7 Cho hàm số **3.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0=0$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm như gián đoạn tại $x_0=0$

C. Hàm số không liên tục tại $x_0=0$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Ta có: $f(0)=2$

$$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right)=2=f(0)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

Bài 8 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}=f(1)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Bài 9 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$

. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

B. Hàm số liên tục tại mọi điẻm

C. Hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}} + 2x\right] = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2 - x + 3\right) = 5 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$.

Bài 10. Tìm a để các hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} x + 2a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + x + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** 0 **D.** 1

Lời giải Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 + x + 1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x + 2a) = 2a$

Suy ra hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Bài 11. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 1}{ax^2 + (2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1} - 1}{x\left(ax + 2a + 1\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4}{\left(ax + 2a + 1\right)\left(\sqrt{4x+1} + 1\right)} = \frac{2}{2a+1}$$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{6}$.

Bài 12. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \dfrac{a(x^2 - 2)}{x - 3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** 1

Lời giải. Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 1} = \dfrac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a(x^2-2)}{x-3}=\dfrac{a}{2}$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Phương pháp:Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …

Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x)=\tan 2x+\cos x$ **2.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{x^2-3x+2}$

Lời giải.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases}x-1\ge 0\\x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\ne 2\end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x<2\\(1-a)x & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Với $x<2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x>2\Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x=2$ ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(1-a)x=2(1-a)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}a^2(\sqrt{x+2}+2)=4a^2$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 4a^2=2(1-a)\Leftrightarrow a=-1,a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=-1,a=\dfrac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-2\}$ .Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2,x=3$

C. Hàm số liên tục tại $x=-2,x=3$

D. Tất cả đều sai

Lời giải. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{3;-2\}$ .Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2,x=3$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

C. TXĐ : $D=\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Lời giải. TXĐ : $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x)=0=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục trái tại $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x)=0=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục phải tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc D và gián đoạn tại các điểm

$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Bài 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & khi\, x<2\\ 2-x & khi\ x\ge 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=2$.

Lời giải. TXĐ : $D=\mathbb{R}\backslash\left\{2\right\}$

- Với $x<2\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x^3-16}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>2\Rightarrow f(x)=2-x\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=2$ ta có : $f(2)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2-x\right)=0$;

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}=-\frac{1}{24}\ne\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=2$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1\\ \frac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(1:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Lời giải. Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

- Với $x<1\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>1\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=1$ ta có : $f(1)=\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{2}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}=\frac{2}{3}=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

Hàm số liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 6. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\left|x-1\right|} & khi\, x\neq 1\\ a\ \ khi\ \ x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(1:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Lời giải. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$ và gián đoạn tại $x=1$

Bài 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & khi\, x\neq 0\\ 0\ \ khi\ \ x=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=0$.

Lời giải. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$ và gián đoạn tại $x=0$

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\leq 0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=2$.

Lời giải. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 2$ và gián đoạn tại $x=2$

Bài 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1 & \text{khi } \left|x\right|\leq 1\\ 3x-1 & \text{khi } \left|x\right|>1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=\pm 1$.

Lời giải. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq \pm 1$ và gián đoạn tại $x=\pm 1$.

Bài 10. Xác định a,b để các hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x \text{ khi } |x|\le \dfrac{\pi}{2}\\ ax+b \text{ khi } |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=2\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=\dfrac{1}{\pi}\\ b=0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=0\end{cases}$

Lời giải. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}a+b=1\\ -\dfrac{\pi}{2}a+b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=0\end{cases}$

Bài 11. Xác định a,b để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\ne 0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $\begin{cases}a=10\\ b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=11\\ b=-1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=12\\ b=-1\end{cases}$

Lời giải. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$.

Bài 12. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=\dfrac{4}{3}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Lời giải. Với $x\ne 1$ ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có: $f(1)=3m-2$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^2+x+2}{x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right]=2$$

Nên hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 3m-2=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$

Vậy $m=\frac{4}{3}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 13. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=-\frac{1}{6}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Lời giải. • Với $x>0$ ta có $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$

• Với $x<0$ ta có $f(x)=2x^2+3m+1$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;0)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có: $f(0)=3m+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2+3m+1\right)=3m+1$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow 3m+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$

Vậy $m=-\frac{1}{6}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 14. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=-\frac{1}{6}$ **C.** $m=5$ **D.** $m=0$

Lời giải Với $x>2$ ta có hàm số liên tụ**C.**

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$ và liên tục tại $x=2$.

• Hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi tam thức

$g(x)=x^2-2mx+3m+2\ne 0,\ \forall x\le 2$

TH 1: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2\le 0\\ g(2)=-m+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2}\le m\le\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

TH 2: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2>0\\ x_1=m-\sqrt{\Delta'}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3m-2>0\\ m>2\\ \Delta'<(m-2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{3+\sqrt{17}}{2}\\ m<6\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{17}}{2}<m<6$

Nên $\frac{3-\sqrt{17}}{2} \le m < 6$ (*) thì $g(x) \ne 0, \forall x \le 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} = \frac{3}{6-m}$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \frac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow m=5$ (thỏa (*))

Vậy $m=5$ là những giá trị cần tìm.

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp :

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm.

1. $x^5+3x+1=0$ **2.** $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$

Lời giải.

1. Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1 \Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0$ (1)

Do $A=\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên (1) $\Leftrightarrow x_1=x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

2. Điều kiện: $x \le \frac{3}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4$ liên tục trên $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$f(0)=-4-3\sqrt{3}<0, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{8}>0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right)<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1^3-x_2^3\right)+2\left(x_1-x_2\right)-3\left(\sqrt{3-2x_1}-\sqrt{3-2x_2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\underbrace{\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2+\frac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}\right)}_{B}=0$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$

(Vì $B=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+2+\frac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}>0$)

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm :

1. $x^7+3x^5-1=0$ **2.** $x^2\sin x+x\cos x+1=0$

Lời giải.

1. Ta có hàm số $f(x)=x^7+3x^5-1$ liên tục trên R và $f(0).f(1)=-3<0$

Suy ra phương trinh $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

2. Ta có hàm số $f(x)=x^2\sin x+x\cos x+1$ liên tục trên R và $f(0).f(\pi)=-\pi<0$. Suy ra phương trinh $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5+2x^3+15x^2+14x+2}=3x^2+x+1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$x^5+2x^3+15x^2+14x+2=\left(3x^2+x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1=0$ (1)

Hàm số $f(x)=x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2)=-95<0, f(-1)=1>0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{19}{32}<0$

$f(0)=1>0, f(2)=-47<0, f(10)=7921>0$

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$\left(-2;-1\right)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $\left(0;2\right)$, $\left(2;10\right)$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt

1. $x^3-3x+1=0$ **2.** $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m(x-1)^3(x+2)+2x+3=0$ **2.** $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=m$

3. $m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)=0$ **(** $a\le b\le c\le d$ **).**

Bài 3 Cho $m>0$ và a,b,c là ba số thực bất kỳ thoả mãn

$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình :

1. $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

2. $x^5-5x^3+4x-1=0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

3. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$; $a,b,c>0$ có hai nghiệm phân biệt.

4. $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m

5. $m^2.(x-2)+m(x-1)^3.(x-2)^4+3x-4=0$ có nghiệm với mọi m.

Bài 5 . Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n<m;\ mp<n^2$ và $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x)=ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 6.

1. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tụ**C.**Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c\ge 0$ sao cho $f(c)=c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ thỏa: $f(3x)=f(x)$.

4. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa $f(0)=f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a ;b] và n điểm $x_1;x_2;...;x_n\in[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c\in[a;b]$ sao cho $nf(c)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0<\alpha<\beta<1$ sao cho

$$\cos\alpha=\alpha^2 \text{ và } \beta\tan\beta=1.$$

Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Bài 1

1. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+1$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-2)=-1$; $f(0)=1$; $f(1)=-1$; $f(2)=3$

$\Rightarrow f(-2).f(0)=-1<0, f(0).f(1)=-1<0, f(1).f(2)=-3<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng

$(-2;0),(0;1),(1;2)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

2. Phương trình $\Leftrightarrow 2x-3=6\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow (2x-3)^3-216(x-1)=0$

Xét hàm số $f(x)=(2x-3)^3-216(x-1)$, ta có hàm số liên tục trên R và

$f(-4)=-251, f(0)=189, f(1)=-1, f(7)=35$

Suy ra $\Rightarrow f(-4).f(0)<0, f(0).f(1)<0, f(1).f(7)<0$

Suy ra phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng

$(-4;0),(0;1),(1;7)$.

Mà f(x) là đa thức bậc ba nên f(x) chỉ có tối đa 3 nghiệm

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm.

Bài 2

1. Ta có hàm số $f(x)=m(x-1)^3(x+2)+2x+3$ liên tục trên R và

$f(1).f(-2)=-5<0 \Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;1)$

2. Điều kiện : $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Xét hàm số $f(x)=\sin x-\cos x-m\sin x\cos x$,liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và

$f(0).f(\dfrac{\pi}{2})=-1<0$ do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

$x_0 \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Do đó phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

3. Hàm số $f(x)=m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)$ liên tục trên R và

$f(a).f(c)=n^2(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)\leq 0 \Rightarrow$ phuowngt rình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài 3 Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$

- $c=0 \Rightarrow f(x)=0$ có nghiệm $x=0$
- $c \neq 0$ ta có $f(0)=c; f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)=\dfrac{-c}{m(m+2)}$

$\Rightarrow f(0).f\left(\dfrac{m+1}{m+2}\right)=\dfrac{-c^2}{m(m+2)}<0$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm.

Bài 4. Gọi $f(x)$ là vế trái của các phương trình

1. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(-1)=-3<0$

Nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;1)$.

2. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-2)f(-\frac{3}{2})<0;$

$f(-\frac{3}{2})f(-1)<0; f(-1).f(\frac{1}{2})<0; f(\frac{1}{2})f(1)<0; f(1)f(3)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

3. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f(a)f(b)f(c)=-abc\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

4. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x).\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

5. Ta có hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1).f(2)<0$

Nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 5 Ta xét $f(\frac{n}{m})=a\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c$.

Mặt khác từ : $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=0 \Rightarrow \frac{m}{n^2}\left(a.\frac{n^2}{m^2}+b\frac{n}{m}+c\right)+c(\frac{1}{p}-\frac{m}{n^2})=0$

$\Leftrightarrow \frac{m}{n^2}f(\frac{n}{m})+c.\frac{n^2-pm}{pn^2}=0 \Leftrightarrow f(\frac{n}{m})=\frac{pm-n^2}{pm}c=\frac{pm-n^2}{pm}f(0)$

* Xét $c=0$

Nếu $a=0\Rightarrow b=0\Rightarrow f(x)$ là đa thức không, do đó f(x) sẽ có nghiệm trong (0;1)

Nếu $a\neq0$, từ giả thiết $\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{n}{m}<1$ và $f(x)=x(ax+b)=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}\in(0;1)$

* Xét $c\neq0$, ta có: $f\left(\frac{n}{m}\right).f(0)=\frac{pm-n^2}{pm}f^2(0)<0\Rightarrow f(x)$ có nghiệm $x\in(0;\frac{n}{m})\subset(0;1)$.

Bài 6.

1. Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$,ta có $y=g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $g(0)g(1)<0$ nên tồn tại $c\in[0;1]: g(c)=0\Leftrightarrow f(c)=c$.

2. • Nếu $f(0)=0$ thì ta chọn $c=0$.

• Nếu $f(0)>0$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$, ta có hàm g liên tục trên $[0;+\infty)$ và $g(0)>0$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L<1$ nên tồn tại số $a>0$ sao cho $\frac{f(a)}{a}<1\Rightarrow g(a)<0$

$\Rightarrow g(0).g(a)<0$ nên tồn tại số thực $c\in(0;a)$ sao cho $g(c)=0$

Hay là $f(c)=c$.

3. Ta có: $f(x)=f\left(\frac{x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3^2}\right)=...=f\left(\frac{x}{3^n}\right)$

Cho $n\to\infty\Rightarrow\frac{x}{3^n}\to 0,\ \forall x$

Suy ra: $f(x)=f(0)=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy f là hàm hằng.

4. Xét hàm số $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$, ta có g là hàm liên tục trên $\left[0;\frac{n-1}{n}\right]$

Và $\sum\limits_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=f(1)-f(0)=0$

Suy ra tồn tại hai chỉ số $i,j\in\{0,1,...,n-1\}$ sao cho : $g\left(\frac{i}{n}\right).g\left(\frac{j}{n}\right)<0$

Hay phương trình : $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ có nghiệm trên $[0;1]$.

Bài 7.

1. Xét hàm số : $g(x)=nf(x)-f(x_1)-f(x_2)-...-f(x_n)$ liên tục trên [a ;b].

Vì f liên tục trên đoạn [a ;b] nên tồn tại giá trị lớn nhất M, nhỏ nhất m do đó tồn tại $\alpha,\beta\in[a,b]$ sao cho $f(\alpha)=m, f(\beta)=M\Rightarrow g(\alpha).g(\beta)<0$.

2. Hàm số : $f(x)=\cos x-x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0).f(1)=1(\cos 1-1)<0$

Suy ra $\exists\alpha\in(0;1): f(\alpha)=0$ hay $\cos\alpha=\alpha^2$

Mặt khác hàm số $y=\cos x$ là hàm nghịch biến trên $(0;1)$, hàm $y=x^2$ là hàm đồng biến trên $(0;1)$ nên α là số duy nhất.

Hàm số $g(x)=x\tan x-1$ liên tục trên $(0;1)$ và $f(0).f(1)=-1(\tan 1-1)<0$, đồng thời hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;1)$ nên tồn tại duy nhất số thực $\beta\in(0;1)$ sao cho $\beta\tan\beta-1=0$.

Vì $\sin x<x\ \ \forall x>0$ nên $g(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}-1<0=f(\beta)\Rightarrow\alpha<\beta$.

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

TẬP 3. 175 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

https://web.facebook.com/phong.baovuong

Mục lục

BÀI TẬP TỔNG HỢP

TỔNG HỢP LẦN 1. CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

Với mỗi câu từ số 1 đến 91 dưới đây đều có 4 phương án lựa chọn, trong đó chỉ có một phương án đúng. Hãy khoanh tròn vào chữ cái đứng đầu câu trả lời mà em cho là đúng.

(Ta quy ước viết $\lim u_n$ thay cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$)

Câu 1. Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{1}{n}$; **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$; **C.** $\frac{n+1}{n}$; **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Câu 2. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{3}\right)^n$; **B.** $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$; **C.** $\left(-\frac{5}{3}\right)^n$; **D.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Câu 3. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$; **B.** $(-1,01)^n$;

C. $(1,01)^n$; **D.** $(-2,001)^n$.

Câu 4. Dãy nào sau đây không có giới hạn?

A. $(0,99)^n$; **B.** $(-1)^n$; **C.** $(-0,99)^n$; **D.** $(-0,89)^n$.

Câu 5. $\lim\frac{(-1)^n}{n+3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{3}$; **B.** -1; **C.** 0; **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 6. $\lim\left(\frac{3-4n}{5n}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$; **B.** $-\frac{3}{5}$; **C.** $\frac{4}{5}$; **D.** $-\frac{4}{5}$.

Câu 7. $\lim\frac{2^n+3^n}{3^n}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 1; **C.** $\frac{2}{3}$; **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 8. $\lim\sqrt{4-\frac{\cos 2n}{n}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\sqrt{2}$; **C.** 2; **D.** 4.

Câu 9. $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $+\infty$; **C.** $\frac{3}{4}$; **D.** $\frac{2}{7}$.

Câu 10. $\lim \dfrac{3n^4-2n+3}{4n^4+2n+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $+\infty$; **C.** $\dfrac{3}{4}$; **D.** $\dfrac{4}{7}$.

Câu 11. $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{4n^4+5n+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{3}{4}$; **B.** 0; **C.** $\dfrac{1}{2}$; **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 12. $\lim \dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $+\infty$; **C.** $\dfrac{3}{4}$; **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 13. $\lim\left(-3n^3+2n^2-5\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -3; **B.** -6; **C.** $-\infty$; **D.** $+\infty$.

Câu 14. $\lim\left(2n^4+n^2-5n\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\infty$; **B.** 0; **C.** 2; **D.** $+\infty$.

Câu 15. $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+5}-\sqrt{n+4}}{2n-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 1; **C.** 2; **D.** $+\infty$.

Câu 16. $\lim\left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 10; **C.** $\sqrt{10}$; **D.** 0.

Câu 17. $\lim \dfrac{3-2n+4n^2}{4n^2+5n-3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 1; **C.** $\dfrac{3}{4}$; **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Câu 18. Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim\sqrt{u_n+9}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $L+9$; **B.** $L+3$; **C.** $\sqrt{L+9}$; **D.** $\sqrt{L}+3$.

Câu 19. Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{u_n+8}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{\sqrt{L}+\sqrt{8}}$; **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{L+8}}$; **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{L}+2}$; **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{L+8}}$.

Câu 20. $\lim \dfrac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1; **B.** 2; **C.** 4; **D.** $+\infty$.

Câu 21. $\lim \dfrac{1-2n+2n^2}{5n^2+5n-3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\dfrac{1}{5}$; **C.** $\dfrac{2}{5}$; **D.** $-\dfrac{2}{5}$.

Câu 22. $\lim \frac{10^4 n}{10^4 + 2n}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 10000; **C.** 5000; **D.** 1.

Câu 23. $\lim \frac{1+2+3+...+n}{2n^2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\frac{1}{4}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $+\infty$.

Câu 24. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{6n+2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$; **B.** $\frac{1}{4}$; **C.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$; **D.** 0.

Câu 25. $\lim n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-3}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 4; **C.** 2; **D.** -1.

Câu 26. $\lim \frac{n + \sin 2n}{n+5}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{2}{5}$; **B.** $\frac{1}{5}$; **C.** 0; **D.** 1.

Câu 27. $\lim\left(3n - 4n^3\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\infty$; **B.** -4; **C.** 3; **D.** $+\infty$.

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$; **B.** $u_n = \frac{1-2n}{5n+5}$;

C. $u_n = \frac{1-2n^2}{5n+5}$; **D.** $u_n = \frac{1-2n}{5n+5n^2}$.

Câu 29. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = 3n^2 - n^3$; **B.** $u_n = n^2 - 4n^3$;

C. $u_n = 3n^2 - n$; **D.** $u_n = 3n^3 - n^4$.

Câu 30. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $u_n = n^4 - 3n^3$; **B.** $u_n = 3n^3 - n^4$;

C. $u_n = 3n^2 - n$; **D.** $u_n = -n^2 + 4n^3$.

Câu 31. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; ...; \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; ...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1; **B.** $\frac{1}{3}$; **C.** $-\frac{1}{3}$; **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 32. Tổng của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...; \frac{(-1)^n}{2^n}; ...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $-\frac{1}{3}$; **C.** $-\frac{2}{3}$; **D.** -1.

Câu 33. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{3};-\frac{1}{9};...;\frac{(-1)^{n+1}}{3^n};...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{4}$; **B.** $\frac{1}{2}$; **C.** $\frac{3}{4}$; **D.** 4.

Câu 34. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2};\frac{1}{6};...;\frac{1}{2.3^{n-1}};...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{3}{8}$; **C.** $\frac{3}{4}$; **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 35. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2};-\frac{1}{6};...;\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}};...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{8}{3}$; **B.** $\frac{3}{4}$; **C.** $\frac{2}{3}$; **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 36. Tổng của cấp số nhân vô hạn $1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};...;\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}};...$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{2}{3}$; **B.** $\frac{2}{3}$; **C.** $\frac{3}{2}$; **D.** 2.

Câu 37. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$; **B.** $u_n=\frac{1+2n}{5n+5}$; **C.** $u_n=\frac{1+n^2}{5n+5}$; **D.** $u_n=\frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.

Câu 38. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n=\frac{9n^2+7n}{n+n^2}$; **B.** $u_n=\frac{2007+2008n}{n+1}$;

C. $u_n=2008m-2007n^2$; **D.** $u_n=n^2+1$.

Câu 39. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$; **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$; **C.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$; **D.** $\lim\frac{2n^3-3}{-2n^2-1}$.

Câu 40. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$; **B.** $\lim\frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$; **C.** $\lim\frac{2n^2-3n^4}{-2n^3+2n^2}$; **D.** $\lim\frac{3+2n^3}{2n^2-1}$.

Câu 41. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\frac{2n^2+3}{n^3+4}$; **B.** $\lim\frac{2n-3n^3}{2n^2-1}$; **C.** $\lim\frac{2n^2-3n^4}{-2n^3+2n^2}$; **D.** $\lim\frac{3-2n^3}{2n^2-1}$.

Câu 42. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

A. $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$; **B.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+5}$; **C.** $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+5}$; **D.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+5n^2}$.

Câu 43. $\lim\limits_{x\to-1}(3)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2; **B.** -1; **C.** 0; **D.** 3.

Câu 44. $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-2x+3)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 2; **C.** 4; **D.** 6.

Câu 45. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x-5\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -15; **B.** -7; **C.** 3; **D.** $+\infty$.

Câu 46. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^4-2x+3}{5x^4+3x+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\frac{4}{9}$; **C.** $\frac{3}{5}$; **D.** $+\infty$.

Câu 47. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{2}{5}$; **B.** $\frac{3}{5}$; **C.** $-\infty$; **D.** $+\infty$.

Câu 48. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2-x^5}{x^4+x+5}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 3; **C.** -1; **D.** $-\infty$.

Câu 49. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\infty$; **B.** $\frac{3}{5}$; **C.** $-\frac{2}{5}$; **D.** 0.

Câu 50. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{9}$; **B.** $\frac{3}{5}$; **C.** $-\frac{2}{5}$; **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 51. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4-3x^2+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$; **B.** $\frac{5}{9}$; **C.** $\frac{3}{5}$; **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 52. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^4-x^5}{x^4+x+5}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{5}$; **B.** $\frac{4}{7}$; **C.** $\frac{2}{5}$; **D.** $\frac{2}{7}$.

Câu 53. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^4-2x}{x^4-3x+2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{13}{6}$; **B.** $\frac{7}{4}$; **C.** $\frac{11}{6}$; **D.** $\frac{13}{6}$.

Câu 54. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x^3}{x^2-x+3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{4}{9}$; **B.** $\frac{12}{5}$; **C.** $\frac{4}{3}$; **D.** $+\infty$.

Câu 55. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x^5}{2x^4+3x^5+2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\frac{1}{12}$; **B.** $-\frac{1}{7}$; **C.** $-\frac{2}{3}$; **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 56. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+x^3}{x^2-x+1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{10}{7}$; **B.** $-\dfrac{10}{3}$;

C. $\dfrac{6}{7}$; **D.** $-\infty$.

Câu 57. $\lim\limits_{x\to -1}\left|4x^3-2x-3\right|$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 9; **B.** 5; **C.** 1; **D.** -5.

Câu 58. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+3}{9x^5+5x^4+1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$; **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 59. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2+3}{7x^2+9x-1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\sqrt{\dfrac{1}{15}}$; **B.** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$; **C.** $\sqrt{\dfrac{35}{9}}$; **D.** $+\infty$.

Câu 60. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2+3x}{x^2+16x-1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\sqrt{\dfrac{1}{8}}$; **B.** $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$; **C.** $\dfrac{3}{8}$; **D.** $+\infty$.

Câu 61. $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{1-x^3}{3x^2+x}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 1; **C.** $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; **D.** $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Câu 62. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{1}{2}$; **B.** $\dfrac{1}{2}$; **C.** $-\infty$; **D.** $+\infty$.

Câu 63. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{10-x^3}{3x^2+x}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\dfrac{3}{2}$; **B.** $\sqrt{\dfrac{11}{4}}$; **C.** $\sqrt{\dfrac{9}{2}}$; **D.** $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

Câu 64. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **C.** $-\infty$; **D.** $+\infty$.

Câu 65. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^4+x^3-2x^2-1}{x-2x^4}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. – 2; **B.** – 1; **C.** 1; **D.** 2.

Câu 66. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\frac{5}{\sqrt{2}}$; **B.** $\frac{5}{2}$; **C.** $\sqrt{5}$; **D.** $+\infty$.

Câu 67. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 0; **C.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$; **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 68. $\lim\limits_{y\to1} \frac{y^4-1}{y-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 4; **C.** 2; **D.** $-\infty$.

Câu 69. $\lim\limits_{y\to a} \frac{y^4-a^4}{y-a}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** $2a^3$; **C.** $4a^3$; **D.** $4a^2$.

Câu 70. $\lim\limits_{y\to1} \frac{y^4-1}{y^3-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 0; **C.** $\frac{3}{4}$; **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 71. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}-\sqrt{x+3}}{2x-3}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** 1; **C.** 2; **D.** $+\infty$.

Câu 72. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 0; **B.** – 1; **C.** $-\frac{1}{2}$; **D.** $-\infty$.

Câu 73. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-3x+2}{2x-4}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** $\frac{3}{2}$; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 74. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-12x+35}{x-5}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 5; **C.** – 5; **D.** – 14.

Câu 75. $\lim\limits_{x\to5} \frac{x^2-12x+35}{5x-25}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** $\frac{1}{5}$; **C.** $\frac{2}{5}$; **D.** $-\frac{2}{5}$.

Câu 76. $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2+2x-15}{2x+10}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. – 8; **B.** – 4; **C.** $\frac{1}{2}$; **D.** $+\infty$.

Câu 77. $\lim\limits_{x\to5} \frac{x^2-2x-15}{2x-10}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. – 4; **B.** – 1; **C.** 4; **D.** $+\infty$.

Câu 78. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9x-20}{2x+10}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{5}{2}$; **B.** – 2; **C.** $-\dfrac{3}{2}$; **D.** $+\infty$.

Câu 79. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{2}{5}$; **B.** $\dfrac{3}{5}$; **C.** $-\infty$; **D.** $+\infty$.

Câu 80. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. – 3; **B.** – 1; **C.** 0; **D.** 1.

Câu 81. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\infty$; **B.** 0; **C.** 1; **D.** $+\infty$.

Câu 82. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{1}{3}$; **B.** $\dfrac{1}{3}$; **C.** 0; **D.** 1.

Câu 83. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right)$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 4; **C.** 0; **D.** $-\infty$.

Câu 84. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x}{\sqrt{2x+3}}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$; **B.** 2; **C.** 6; **D.** $+\infty$.

Câu 85. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^3-x^2+x}{x-2}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $-\dfrac{8}{3}$; **B.** – 2; **C.** $-\dfrac{4}{3}$; **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Câu 86. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$; **B.** 2; **C.** 1; **D.** $-\infty$.

Câu 87. Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 0; **B.** 1; **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 88. Cho $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ với $x\neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 0; **B.** 1; **C.** $\sqrt{2}$; **D.** 2.

Câu 89. Cho $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x}{3x}$ với $x\neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f\left(0\right)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{5}{3}$; **B.** $\dfrac{1}{3}$;

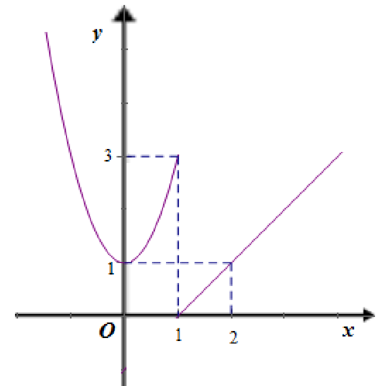
C. 0; **D.** $-\dfrac{5}{3}$.

Câu 90. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & \text{vôùi } x<1, x\neq 0\\ 0 & \text{vôùi } x=0\\ \sqrt{x} & \text{vôùi } x\geq 1\end{cases}$. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$; **B.** mọi điểm trừ $x=0$;

C. mọi điểm trừ $x=1$; **D.** mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Câu 91. Hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên *không* liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x=0$;

B. $x=1$;

C. $x=2$;

D. $x=3$.

ĐÁP ÁN CHƯƠNG IV

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
C	D	A	B	C	D	B	C	A	C

Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16	Câu 17	Câu 18	Câu 19	Câu 20
A	B	C	D	B	D	B	C	D	A

Câu 21	Câu 22	Câu 23	Câu 24	Câu 25	Câu 26	Câu 27	Câu 28	Câu 29	Câu 30
C	C	B	A	C	D	A	D	C	B

Câu 31	Câu 32	Câu 33	Câu 34	Câu 35	Câu 36	Câu 37	Câu 38	Câu 39	Câu 40

B	B	A	C	D	B	C	D	B	A

Câu 41	Câu 42	Câu 43	Câu 44	Câu 45	Câu 46	Câu 47	Câu 48	Câu 49	Câu 50
C	A	D	D	B	C	C	D	D	A

Câu 51	Câu 52	Câu 53	Câu 54	Câu 55	Câu 56	Câu 57	Câu 58	Câu 59	Câu 60
D	A	D	C	B	A	B	D	B	B

Câu 61	Câu 62	Câu 63	Câu 64	Câu 65	Câu 66	Câu 67	Câu 68	Câu 69	Câu 70
A	C	D	A	B	B	D	B	C	D

Câu 71	Câu 72	Câu 73	Câu 74	Câu 75	Câu 76	Câu 77	Câu 78	Câu 79	Câu 80
B	A	C	C	D	B	C	B	D	A

Câu 81	Câu 82	Câu 83	Câu 84	Câu 85	Câu 86	Câu 87	Câu 88	Câu 89	Câu 90
C	A	C	B	D	A	C	D	D	A

Câu 91
B

TỔNG HỢP LẦN 2.
CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

Câu 1. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim|u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = +\infty$.

B. Nếu $\lim|u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim u_n = 0$, thì $\lim|u_n| = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = -a$, thì $\lim|u_n| = a$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{4^n}$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$. Chọn giá trị đúng của $\lim u_n$ trong các số sau:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. 1.

Câu 3. Kết quả đúng của $\lim\left(5 - \frac{n^2\cos 2n}{n^2+1}\right)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** –4. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 4. Kết quả đúng của $\lim \frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n}$ là:

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Câu 5. Kết quả đúng của $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 6. Giới hạn dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. –∞. **B.** +∞. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** 0.

Câu 7. $\lim \frac{3^n-4.2^{n-1}-3}{3.2^n+4^n}$ bằng :

A. +∞. **B.** –∞. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 8. Chọn kết quả đúng của $\lim \frac{\sqrt{n^3-2n+5}}{3+5n}$:

A. 5. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** –∞. **D.** +∞.

Câu 9. Giá trị đúng của $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. +∞. **B.** –∞. **C.** –2. **D.** 0.

Câu 10. Giá trị đúng của $\lim\left(3^n-5^n\right)$ là:

A. –∞. **B.** **C.** 2. **D.** –2.

Câu 11. $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ bằng:

A. +∞. **B.** 0. **C.** –2. **D.** –∞.

Câu 12. Giá trị đúng của $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. –1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** +∞.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (n-1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim u_n$ là:

A. –∞. **B.** 0. **C.** 1. **D.** +∞.

Câu 14. $\lim \dfrac{5^n - 1}{3^n + 1}$ bằng :

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 15. $\lim \dfrac{10}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ bằng :

A. $+\infty$. **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 16. $\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ bằng :

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 17. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm kết quả đúng của $\lim u_n$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 18. Tìm giá trị đúng của S = $\sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} ... + \dfrac{1}{2^n} + ...\right)$.

A. $\sqrt{2} + 1$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. $\text{Lim} \sqrt[4]{\dfrac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}}$ bằng :

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $+\infty$.

Câu 20. Tính giới hạn: $\lim \dfrac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n}$

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 21. Tính giới hạn: $\lim \dfrac{1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)}{3n^2 + 4}$

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 22. Tính giới hạn: $\lim \left[\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Câu 23. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+......+\frac{1}{n(2n+1)}\right]$

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Câu 24. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+......+\frac{1}{n(n+2)}\right]$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 25. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right]$

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 26. Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 27. Chọn kết quả đúng của $\lim\sqrt{3+\frac{n^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ và f(2) = m² – 2 với x ≠ 2. Giá trị của m để f(x) liên tục tại x = 2 là:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\pm\sqrt{3}$. **D.** ±3.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. Chọn câu đúng trong các câu sau:

(I) f(x) liên tục tại x = 2.

(II) f(x) gián đoạn tại x = 2.

(III) f(x) liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

A. Chỉ (I) và (III). **B.** Chỉ (I). **C.** Chỉ (II). **D.** Chỉ (II) và (III).

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & ,x\neq 3, x\neq 2\\ b+\sqrt{3} & ,x=3, b\in R\end{cases}$. Tìm b để f(x) liên tục tại x = 3.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên R.

II. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ có giới hạn khi x → 0.

III. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên đoạn [–3;3].

A. Chỉ (I) và (II). **B.** Chỉ (I) và (III). **C.** Chỉ (II). **D.** Chỉ (III).

Câu 32. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{5x} & ,x\neq 0\\ a+2 & ,x=0\end{cases}$. Tìm a để f(x) liên tục tại x = 0.

A. 1. **B.** –1. **C.** –2. **D.** 2.

Câu 33. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

I. f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b) > 0 thì tồn tại ít nhất số c ∈ (a;b) sao cho f(c) = 0.

II. f(x) liên tục trên (a;b] và trên [b;c) nhưng không liên tục trên (a;c).

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ II đúng. **C.** Cả I và II đúng. **D.** Cả I và II sai.

Câu 34. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

I. f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm.

II. f(x) không liên tục trên [a;b] và f(a).f(b) ≥ 0 thì phương trình f(x) = 0 vô nghiệm.

A. Chỉ I đúng **B.** Chỉ II đúng. **C.** Cả I và II đúng. **D.** Cả I và II sai.

Câu 35. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

I. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi x ≠1.

II. $f(x)=\sin x$ liên tục trên R.

III. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ liên tục tại x = 1..

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Chỉ (II) và (III).

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & ,x\neq\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & ,x=\sqrt{3}\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. f(x) liên tục tại x = $\sqrt{3}$.

II. f(x) gián đoạn tại x = $\sqrt{3}$.

III. f(x) liên tục trên R.

A. Chỉ (I) và (II). **B.** Chỉ (II) và (III). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Cả (I),(II),(III) đều đúng.

Câu 37. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. f(x) = $x^5 - 3x^2 + 1$ liên tục trên R.

II. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên khoảng (–1;1).

III. $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên đoạn [2;+∞).

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (II) và (III). **D.** Chỉ (I) và (III).

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để f(x) gián đoạn tại x = 1.

A. k ≠ ±2. **B.** k ≠ 2. **C.** k ≠ –2. **D.** k ≠ ±1.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,0<x<9\\ m & ,x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,x>9\end{cases}$. Tìm m để f(x) liên tục trên [0;+∞) là.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** 1.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. f(x) liên tục trên các khoảng nào sau đây ?

A. (–3;2). **B.** (–3;+∞) **C.** (–∞; 3). **D.** (2;3).

Câu 41. Cho hàm số f(x) = $x^3 - 1000x^2 + 0{,}01$. phương trình f(x) = 0 có nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

I. (–1; 0). II. (0; 1). III. (1; 2).

A. Chỉ I. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ II. **D.** Chỉ III.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. f(x) liên tục trên các khoảng nào sau đây ?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & ,x\leq\sqrt{2},a\in R\\ (2-a)x^2 & ,x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để f(x) liên tục trên R là:

A. 1 và 2. **B.** 1 và –1. **C.** –1 và 2. **D.** 1 và –2.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{x}\geq 1\\ \dfrac{2x^3}{1+x}, & 0\leq \text{x}<1\\ x\sin x, & \text{x}<0\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. f(x) liên tục trên R.

B. f(x) liên tục trên R\ $\{0\}$.

C. f(x) liên tục trên R\ $\{1\}$.

D. f(x) liên tục trên R\ $\{0;1\}$.

TỔNG HỢP LẦN 3.

CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

Câu 1. Cho dãy số $(u_n)=\dfrac{2n^2(3n+1)-n^3}{2n^2+n}$ và gọi $L=\lim u_n$. Giá trị của L là:

A. $L=\dfrac{5}{2}$ **B.** 5 **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Câu 2. Giá trị của $lm\dfrac{2n^3+n-n^4}{n^2(2n^2+1)}$

A. -1 **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Câu 3. Giá trị của $\lim\dfrac{(3n^2+1)n-4n^3}{n(2n^2+n+1)}$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** -2 **C.** -4 **D.** $\dfrac{3}{2}$

Câu 4. Giá trị của $\lim\left(\dfrac{\sqrt{9n^2+n+1}-n}{2n}\right)$ bằng

A. $\frac{9}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $+\infty$

Câu 5. Giá trị của $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n+1\right)$ bằng:

A. 0 **B.**2 **C.** 1 **D.**3

Câu 6. Giá trị của $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+9n^2+2}\right)$ bằng:

A. $-\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $-\infty$ **D.** $-\frac{3}{2}$

Câu 7. Cho (u_n) là dãy số có $u_n>0$ với mọi n. nếu (u_n) có giới hạn hữu hạn là L..Khẳng định nào trong các khẳng định là đúng:

A. L có thể là 1 số âm **B.** L>0 C, $L\geq 0$ **D.** $L=0$

Câu 8. Giá trị của $\lim\frac{4^{n+1}-5^n-2}{6^n-5^n}$ bằng:

A. 1 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{16}{5}$ **D.** 0

Câu 9. Giá trị của $\lim\frac{3^{2n+2}-4.2^n}{9^{n+1}-4^n}$

A.0 **B.**1 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{9}$

Câu 10. Giá trị của $\lim\frac{4^n-5^n}{4^{n+2}-3^{n-4}}$

A. $\frac{5}{16}$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{5}{4}$ **D.** $-\frac{5}{16}$

Bài 11. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{2n+1}{3n-2}$ **B.** $\lim\frac{2n^2+\text{sinn}}{n^3}$ **C.** $loim\frac{4n(n-1)+n^3}{2n^3}$ **D.** $\lim\frac{2n^2+1}{3n}$

Bài 12. Giá trị của $\lim\frac{2n+5\sin^3 n}{3n+1}$

A. 1 **B.**0 **C.**5 **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 13. Giá trị của $\lim\frac{1+3+3^2+...+3^n}{1+4+4^2+...+4^n}$ bằng"

A.0 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $+\infty$

Câu 14. Đặt $S=1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3+...$ Giá trị của S bằng:

A. 3 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 15. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,62222222....$ được biểu diễn bởi phân số nào:

A. $\frac{57}{33}$ **B.** $\frac{64}{51}$ **C.** $\frac{73}{45}$ **D.** $\frac{68}{57}$

Câu 16. Cho (u_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 2$ và tổng tất cả các số hạng là 3. Thế thì công bội của cấp số nhân này là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 17. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+3x+1}-4}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}-4}{5}$ **B.** 1 **C.**0 **D.** $\frac{8}{5}$

Câu 18. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** -2

Câu 19. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)(x^3-1)}{4-x^2}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $-\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 20. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^3-2x+1}{4x-x^2}$ bằng:

A. -3 **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 21. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x^2-x+2}-4}{x^2+2x}$ bằng:

A. $-\frac{1}{8}$ **B.** $-\frac{13}{8}$ **C.** $\frac{-13}{2}$ **D.** $\frac{13}{16}$

Câu 22. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x^2-3x}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{36}$ **D.** $\frac{1}{12}$

Câu 23. Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-x^2}-2}{\sqrt{x^2+3x}-2}$ bằng:

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{3}{5}$

Câu 24. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}-3x\right)$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 2 **D.** -2

Câu 25. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x}-4x}{\sqrt{9x^2+6x}-x}$ bằng:

A. -1 **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** 0 **D.** $-\infty$

Câu 26. Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+3}-2x+3\right)$ bằng:

A.0 **B.** $+\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Câu 27. Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)$ bằng:

A. 2 **B.** -2 **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{x+2}, x\ge 2\\ 3x-1, x<2\end{cases}$ tìm khẳng định đúng

A. $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=5$

C. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$ **D.** $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ không tồn tại

Câu 29. Giá trị của $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2(x+3)}}{x^2-3x+2}$ bằng"

A. 2 **B.** -2 **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $-\infty$

Câu 30. Giá trị của $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{2x^2-x-6}}{(2-x)(x+3)}$ bằng:

A. $\dfrac{7}{5}$ **B.** $-\dfrac{7}{5}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Câu 31. Hàm sô nào trong các hàm số sau liên tục tại điểm $x=1$?

A. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$ **B.** $g(x)=\begin{cases}x+1, x\ge1\\2x-3, x<1\end{cases}$ **C.** $h(x)=\begin{cases}x+1, x\ge1\\3x-1, x<1\end{cases}$ **D.** $k(x)=\sqrt{1-2x}$

Câu 32. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng:

A. Nếu hàm số f không xác định tại x_0 thì f gián đoạn tại x_0

B. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ không tồn tại thì hàm số f gián đoạn tại x_0

C. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ne f(x_0)$ thì hàm số f gián đoạn tại x_0

D. Cả ba khẳng định đều đúng

Câu 33. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-4}, x\neq -2\\ a, x=-2\end{cases}$ Hàm số liên tục tại $x=-2$ khi.

A. $a=\dfrac{3}{4}$ **B.** $a=-\dfrac{3}{4}$ **C.** $a=\dfrac{1}{4}$ **D.** $a=\dfrac{-1}{4}$

Câu 34. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+1, x\leq 0\\ ax+1, x>0\end{cases}$. Tập hợp các giá trị của tham số a, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. $\varnothing$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $\left\{1\right\}$ **D.** $\left\{3\right\}$

Câu 35. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}, x\neq 2\\ a, x=2\end{cases}$ > tập hợp các giá trị a để hàm số liên tục tại $x=2$ là:

A. $\left\{1\right\}$ **B.** $\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$ **D.** $\left\{-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right\}$

Câu 36. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, x>2\\ a, x=2\\ \tan\dfrac{\pi x}{4}, x<2\end{cases}$ **. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại** $x=2$ **là:**

A. $\left\{3\right\}$ **B.** $\left\{1\right\}$ **C.** $\varnothing$ **D.** $\left\{2\right\}$

Câu 37. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

I. Nếu hàm số f liên tục trên $\left[a;b\right]$ và $f\left(x\right)f\left(b\right)<0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm thuộc $\left(a;b\right)$

II. Nếu hàm số f liên tục trên $\left[a;b\right]$ và $f\left(x\right)f\left(b\right)>0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ không có nghiệm thuộc $\left(a;b\right)$

A. I **B.II** **C. I và II** **D. I và II đều sai**

Câu 38. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x+3}+1, x\leq 1\\ \dfrac{x^3-1}{x^2-x}, x>1\end{cases}$

A. Liên tục trên $\mathbb{R}$

B. liên tục tại mọi đuểm trừ điểm $x=1$

C. Liên tục tại mọi điểm $x\in\left[-3;+\infty\right)$ trừ $x=1$

D. Liên tục tại mọi điểm $x\in\left[-3;+\infty\right)$

Câu 39. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x}{x^2+x}, x\neq 0, x\neq -1\\ 3, x=-1\\ 1, x=0\end{cases}$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. hàm số f liên tục tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$

B. Hàm số f liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc $\left[-1;0\right]$

C. hàm số f liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=-1$

D. Hàm số f liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$

Câu 40. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}-\mathrm{x}\cos\mathrm{x}, \mathrm{x}<0\\ \dfrac{x^2}{x+1}, 0\leq \mathrm{x}<1\\ \mathrm{x}^3, x\geq 1\end{cases}$

A. Liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$

C. Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$

D. Liên tục tại mọi điểm trừ hai điểm $x=0$ và $x=1$

ĐÁP ÁN

1C	2D	3A	4B	5B	6A	7C	8D	9B	10B
11B	12D	13A	14C	15C	16D	17A	18A	19B	20D
21D	22C	23D	24A	25B	26D	27B	28D	29A	30D
31C	32D	33B	34B	35B	36C	37A	38D	39A	40C